## §6. Ортогональные многочлены

• Базис в некоторых гильберт. простр-ве → • Рекурр. соотнош.

→ • Диффф. ур-я

•

### 6.1 Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последов. мономов

ОПР Функция $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ наз-ся весовой функцией или весом, если: 1) $\forall x\in(a,b)\quad h(x)\geq 0$

2) $h(x)>0\quad \forall x\in(a,b)$ кроме, быть может, конечного множества точек $x$

③ $\int_a^b h(x)dx<+\infty$

24.03.2021

Лекция 24

Опр. Пусть $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ – вес. Лебеговским весовым пространством (с весом $h$) наз-ся $\{f:(a,b)\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\mid \int_a^b |f(x)|^2 h(x)dx<+\infty\}$.

Скалярное произведение задают формулой $(f,g)_{L_2^h(a,b)}=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,h(x)dx$

Обозн-е: $L_2^h(a,b)$.

Замечание. При $h\equiv 1$ получаем уже известное простр-во $L_2(a,b)$

Лемма (без Док-ва) $\forall h$ – вес простр-во $L_2^h$ явл. гильбертовым.

Замечание: Если $(a,b)$ – конечный, то $\forall n\geq 0\ x^n\in L_2^h(a,b)$, т.к. $\exists M<+\infty$: $\forall x\in(a,b)\quad |x|^n\leq M \Rightarrow \int_a^b x^{2n}h(x)dx\leq M\int_a^b h(x)dx \overset{③-\text{опре}}{<}+\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n\in L_2(a,b)$

Если $(a,b)$ – бесконечный, тогда условие ③ заменяют вот таким ③' $\forall n\geq 0\ \int_a^b x^{2n}h(x)dx<+\infty$

ОПР Последовательность многочленов $q_0(x), q_1(x),\dots,q_n(x)\dots$ наз-ся последовательностью ортогональных многочленов с весом $h$ на $(a,b)$ если:

1) $\forall m,n\ (q_m(x),q_n(x))_{L_2^h(a,b)}=\delta_{m,n}$ – символ Кронекера

2) $\forall n\ q_n(x)$ является многочленом степени $n$.

3) $\forall n$ $q_n(x)$ имеет положительный старший коэффициент.

## 6.2 Общие свойства ортогональных многочленов.

В этом пункте $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ – послед. ортогон. многочленов с весом $h$ на $(a, b)$.

Свойство 1: $\forall h$ и $\forall a, b$ $\exists\ q_0, \dots, q_n$.

Док-во: следует из процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.

Свойство 2. $\forall h$ и $\forall a, b$ последов-сть ортогональных многочленов определяется однозначно, т.е если $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n \dots$ – еще одна посл-сть ортогональных многочленов с весом $h$ на $(a, b)$, то $\forall n$ $q_n(x) = \tilde{q}_n(x)$.

Док-во: основано на формуле $\{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \dots a_n - \text{любые}\} = \underbrace{L[x^0, x^1, x^2, \dots, x^n]}_{\text{лин. оболочка}} = L[q_0, q_1, \dots, q_n] \overset{\text{опр}}{=} \{a_0 q_0 + a_1 q_1(x) + \dots + a_m q_n(x) \mid a_0, a_1, \dots a_n - \text{любые числа}\}$

$\supseteq$ очевидно из опр. ортогон. многочленов
$\subseteq$ очевидно из лин. алгебры $\Big\} \Rightarrow =$.

Док-во: по индукции. $n = 0$ $\int_a^b q_0^2 h(x) = 1 \Rightarrow q_0 = +\frac{1}{\sqrt{\int_a^b h(x) dx}}$

Шаг индукции Докажем, что: $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ $\forall k = 0, 1, \dots n-1$


$L_n$ $\dim L_n = n+1$. Из лин. алгебры $\Rightarrow \tilde{q}_n(x) = \pm q_n(x)$ ЧТД

$\dim L_{n-1} = n$

Свойство 3 Любой многочлен $Q(x)$ степени $n$ является линейной комбинацией многочленов $q_0, q_1, \dots q_n$.. т.е $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k$

Док-во мы получили, когда доказывали, что $L[x^0, \dots, x^n] = L[q_0, \dots q_n]$

Свойство 4 $\forall$ многочлена $Q_m(x)$ степени $m$ и $\forall n > m$ имеем:

$$\int_a^b Q_m(x)\, q_m(x)\, h(x)\, dx = 0$$

Док-во: из свойства 3 $\Rightarrow Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k q_k \Rightarrow \int_a^b \sum_{k=0}^{m} a_k q_k\, q_n(x) h(x)\, dx =$

$$=\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_a^b q_k(x)\, q_n(x)\, h(x)\,dx}_{C_{nk}} = 0 \qquad \text{ЧТД}$$

<u>Свойство 5</u>. Если $h:(-a,a)\to\mathbb{R}$ является чётной функцией, то $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$ $\forall n\geq 0$ и $\forall x\in(-a,a)$

Док-во: Обозначим $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n\cdot q_n(-x)$. Достаточно доказать, что $\tilde{q}_n(x)=q_n(x)$. Для этого достаточно убедиться, что $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots \tilde{q}_n \ldots$ является послед. ортогональных многочленов с весом $h$ на $(-a,a)$

Это проверим по определению:

1) $$\int_{-a}^{a} \tilde{q}_n(x)\cdot\tilde{q}_m(x)\, h(x)\,dx = \int_{-a}^{a}(-1)^n q_n(-x)(-1)^m q_m(-x)\, h(x)\,dx = \langle -x=y\rangle =$$
$$= (-1)^{n+m}\int_{a}^{-a} q_n(y)\, q_m(y)\, \underset{h(y)}{\underset{\parallel}{h(-y)}}\,(-dy) = (-1)^{n+m}\int_{-a}^{a} q_n(y)\, q_m(y)\, h(y)\,dy = \delta_{n,m}$$

2) $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$ явл. многочленом степени $n$.

3) Пусть $q_n(x) = a_n x^n + \ldots$ Тогда $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n\left[a_n(-x)^n + \ldots\right] =$
$= a_n x^n + \ldots \Rightarrow$ ст. коэффициент $\tilde{q}_n(x) = a_n =$ степень коэфф $q_n(x) > 0$.
ЧТД

<u>Свойство 6.</u> (Трехчленная рекурентная формула)

Пусть $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ Тогда $x\cdot q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)\cdot$
$\cdot q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x)$.

Док-во: $x\cdot q_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n,k}\, q_k(x)$, где $C_{n,k} = \left(x q_n(x), q_k(x)\right)_{L_2^h(a,b)}$

$\forall k\leq n+1$. Упростим: $\sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k}\cdot q_k(x)$.

а) $C_{n,k} = (x q_n(x), q_k(x)) = \int_a^b x\cdot q_n(x)\, q_k(x)\, h(x)\,dx = C_{k,n} \Rightarrow C_{nk} = C_{k,n}$ $\forall n,k$.
Они симметричные

б) $C_{n,k} = 0$ $\forall k > n+1$

в) $C_{n,k} = C_{k,n} = 0$

Опираясь на а), б) в) следует $C_{n,k} = 0$ $\forall k$, кроме $k = n-1, n, n+1$

$\Rightarrow x\cdot q_n(x) = C_{n,n+1}\cdot q_{n+1}(x) + C_{n,n}\cdot q_n(x) + C_{n,n-1}\, q_{n-1}(x)$

Как найти эти коэффициенты? Подставим сюда:

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots = (a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) = C_{n,n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \ldots) +$$
$$+ C_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) + C_{n,n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + \ldots)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^{n+1} & a_n = C_{n,n+1}\, a_{n+1} \\ x^n & b_n = C_{n,n+1}\, b_{n+1} + C_{n,n}\, a_n \end{array}\right\} \Rightarrow C_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow C_{n,n-1} = C_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$C_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_n} \cdot C_{n,n+1} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

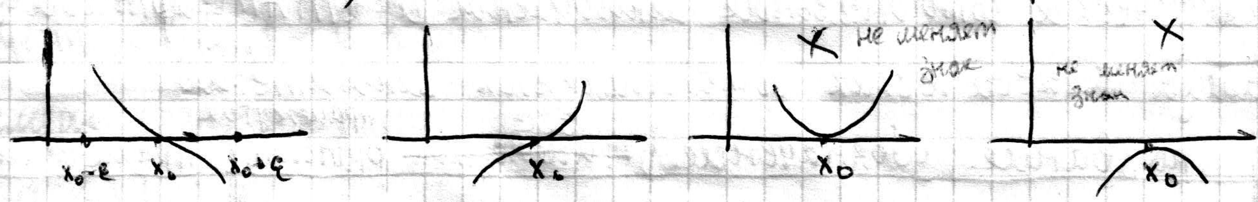
<u>Замечание</u>: Чтобы сообщить компу первые $n$ ортогон. многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ мне нужно сообщить ему $\frac{n(n+1)}{2}$ коэфф, но можно запомнить только коэфф. трехчленной рекуррентной формулы т.е нужно запомнить $\sim 3n$ коэфф.

## 6.3 Свойства корней ортогональных многочленов.

Пусть $h$ - вес на $(a,b)$, $q_0, q_1 \ldots q_n$ - посл-сть ортогон. многочленов с весом $h$.

<u>Теорема</u>: $\forall n \geq 1$ все нули многочлена $q_n(x)$ явл. веществ., простыми и лежат в $(a,b)$

Опр. Говорят, что многочлен $q_n(x)$ меняет знак в $(\cdot)$ $x_0 \in (a,b)$ если $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $q_n(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $q_n(x) < 0$ или $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $q_n(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $q_n(x) > 0$




31.03.2021
Лекция 25

Если $x_0$ - точка перемены знака, то $x$ - корень. Обратное не всегда верно.
$\forall n \geq 1$ у многочлена $q_n(x)$ есть точки перемены знака в $(a,b)$

От противного: Допустим, что точек перемены знака нет $\Rightarrow$ либо $q_n(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ либо $q_n(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$, то

$0 = \int_a^b q_0 q_n h(x)\,dx > 0$ противоречие $0 = \int_a^b q_0 q_n h(x)\,dx < 0$ - противоречие

Перечислим все точки перемены знака многочлена $q_n(x)$ на $(a,b)$

$x_1, x_2, x_n, \dots, x_m \Rightarrow 0 < m \le n =$ степень $q_n(x)$

Если $m=n$, то всё доказано

Пусть $\underline{m<n}$, тогда обозначим $Q_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$

степень $Q_m = m < n$

По свойству 4 из п 6.1 $\Rightarrow \int_a^b \underbrace{Q_m(x)\, q_n(x)}_{\text{не меняет знак}} h(x)\,dx \ne 0$ – противоречие

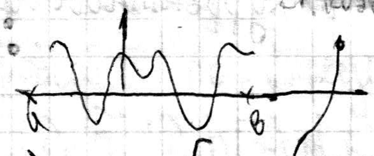
Значит $m=n$ и теорема доказана.

Следствие: $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n \cdot q_n(a) > 0$.

ст. коэфф. $q_n > 0$

Используя Теорему (мат анализ) „О промежуточном значении непр. функц.

Док-во:

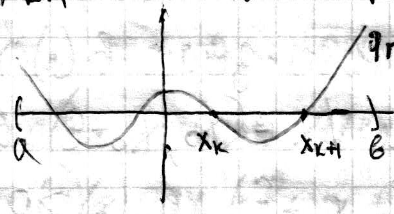




$q_n(b) < 0$ невозможно $\Rightarrow q_n(b)$

$$(-1)^n \cdot q_n(a) > 0 \Rightarrow \begin{cases} q_n > 0 & \text{если } n\text{-чёт} \\ q_n(a) < 0 & \text{если } n\text{-нечёт} \end{cases}$$

<u>Теорема</u>: Нули последовательных ортогональных многочленов перемежаются т.е $\forall n \ge 1$ между любыми последовательными корнями $x_k, x_{k+1}$ многочлена $q_n$ лежит ровно один корень многочлена $q_{n+1}(x)$ Без Док-ва.





## 6.4 Классические ортогональные многочлены и стандартизация

Таблица классических ортогональных многочленов

| N | название | обозначение | вес | промежуток ортогон. | примечание |
|---|---|---|---|---|---|
| N1 | Многочлены Якоби | $P_n(x, \alpha, \beta)$ | $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ | $(-1, 1)$ | $\alpha > -1, \beta > -1$ |
| N2 | многочлены Эрмита | $H_n(x)$ | $e^{-x^2}$ | $(-\infty; +\infty)$ | |
| N3 | Многочлены Лагерра | $L_n^\alpha(x)$ | $x^\alpha e^{-x}$ | $(0; +\infty)$ | $\alpha > -1$ |
| N4 | Ультрасферические (многочлены Гегенбауэра) | $C_n(x, \lambda)$ | $(1-x^2)^{\lambda - 1/2}$ | $(-1, 1)$ | $\lambda > -1/2$ |

| N | название | обозначение | вес | промеж. ортогон | примечание |
|---|---|---|---|---|---|
| N5 | Многочлены Чебышёва 1 род | $T_n(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,1)$ | частный случай многочленов Гегендауэра ⇒ и Якоби |
| N6 | Многочлены Чебышёва 2 род | $U_n(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,1)$ | —//—//— |
| N7 | Многочлены Лежандра | $P_n(x)$ | $1$ | $(-1,1)$ | —//—//— |

Опр. Пусть $q_0, q_1, \dots q_n \dots$ последовательность ортогональных многочленов с весом $h$. и $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n \dots$ - посл-сть ненулевых вещественных чисел. Тогда говорят, что послед-сть $\alpha_0 q_0, \alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2 \dots \alpha_n q_n \dots$ получена в результате стандартизации из исходной последовательности $q_0, q_1, \dots q_n \dots$

Замечание. Стандартизация последов. ортогональных многочленов не изменит большинства свойств ортогональных многочленов изученных в 6.1 - 6.3

Примеры стандартизации:

1) $\int_a^b q_n^2(x)\, h(x)\, dx = 1$ и стар. коэфф. $q_n > 0$

2) Старший коэфф. $q_n(x) = 1$.

3) $q_n(b) = 1$ 4) С помощью производящей функции.

ОПР. Функция $\omega(t, x)$ наз-ся производящей функцией последовательности ортогональных многочленов если:

$$\omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n$$ где $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ - некоторые постоянные

Обзор основных свойств классических ортогональных многочленов

Без док-ва.

① Если $h$ — одна из весовых функций классических ортогональных многочленов, то $\exists \alpha_0\, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in (a, b)$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} \overset{\text{обозн}}{=} \frac{A(x)}{B(x)}$$ ⊛ Уравнение Пирсона

И еще $\lim\limits_{x \to a+0} h(x) B(x) = \lim\limits_{x \to b-0} h(x) B(x) = 0$ (**) краевые условия для уравнения Пирсона.

② Если выполнено ⊛ и (**) хоть с какими-то константами $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$, то вес $h$ совпадает (с точностью до линейной замены) с одним из весов и табличных классических ортог. мн-в.

③ Если $q_0, q_1 \ldots q_n$ — ортогональные многочлены с весом $h$ и для $h$ выполнены ⊛ и (**), то

3.1 Функция $y = q_n(x)$ является решением О.Д.У

$$B(x)\, y''(x) + [A(x) + B'(x)]\, y'(x) - \gamma_n\, y(x) = 0$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$

3.2 $\forall n \quad q_n(x) = C_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[h(x)\, B^n(x)\right]$ где $C_n$ · некоторая постоянная

Формула Родрига

3.3 $\forall m \geq 1$ последовательность многочленов $\frac{d^m}{dx^m} q_m(x), \frac{d^m}{dx^m} q_{m+1}(x) \ldots$

$\ldots \frac{d^m}{dx^m} q_{m+k}(x) \ldots$ является послед. классических ортогональных многочленов на том же $(a, b)$, но с другим весом

3.4 У многочленов $q_0, q_1, q_2 \ldots q_n \ldots$ имеется производящая функция, ВЫРАЖАЮЩАЯСЯ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

## 6.5 Многочлены Лежандра. Производящая функция. соотношение ортогональностей

ОПР. Функция $w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$ наз-ся производящей функцией многочленов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P_n(x)}\, t^n \quad ⊛$$

Эти коэффо мы называем многочленами Лежандра стандартизованные с помощью произв. функций.

План: Убедимся, что $\forall n$ $P_n(x)$ (из этого определения) есть многочлен степени $n$.

Убедимся, что эти многочлены ортогональны на $(-1;1)$ с весом $h \equiv 1$

А потом заметим, что эти $P_n(x)$ задают те же многочлены, что и в таблице классических ортогональных многочленов (т.к ортогон. многочлены задаются весом однозначно)

Из мат анализа $w(t,x) = \sum\limits_0^\infty \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(t,x) \Big|_{t=0} t^n$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(t,x) \Big|_{t=0}$$

$$P_0(x) = \frac{1}{0!} w(0,x) = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial t} w(1,x) \Big|_{t=0} = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial t} (1-2tx+t^2)^{-1/2} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}(1-tx+t^2)^{-3/2}(-2x+2t)\Big|_{t=0} = x$$

Упр. Найди на $P_2(x)$? Ответ: $\frac{3x^2-1}{2} = P_2(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t,x) = \frac{x-t}{1-2tx+t^2} w(t,x) \Rightarrow (1-2tx+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} = (x-t)\, w(t,x)$$

Подставим сюда $w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

$$(1-2tx+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, n\, t^{n-1} = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$k = n+1$

Приводим подобные при $t^k$

$$t^k \,|\, (k+1) P_{k+1}(x) - 2xk\, P_k(x) + (k-1) P_{k-1} = xP_k - P_{k-1}$$

7.04.2021
Лекция 10 + 16

Изменим индекс: $n \to k$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\, x\, P_n + n P_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (1)$$

Это трехчленная рекуррентная формула для многочленов Лежандра, стандартизованных с помощью производящей функции.

Лемма: $\forall n \geq 0$ коэфф $P_n(x)$ в формуле (*) явл. многочленом степени $n$ с полож. старшим коэфф.

Док-во: Достаточно проверить, что $P_n(x)$ удовл (1) и „начальным" условиям $P_0 = 1$, $P_1 = x$ явл. многоч-м степени $n$ с положительным старшим коэфф.

По индукции: База: $n=0$, $n=1$ - верно

Шаг: Док-ть что $P_n$ и $P_{n-1}$ удовлетворяет

Тогда: (1) $\Rightarrow P_{n-1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n - \frac{n}{n-1} P_{n-1}$ ЧТД

$\frac{\partial}{\partial x}(*) \Rightarrow (1-2tx+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} = tw$ Подставив сюда (*) получим.

при $t^k$: $P_k' - 2x P_{k-1}' + P_{k-2}' - P_{k-1} = 0$

Подставим $n+1 \to k$:

$$\left.\begin{aligned} &P_{n+1}' - 2x P_n' + P_{n-1}' - P_n = 0 \\ \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow\ &(n+1) P_{n+1}' - (2n+1) x P_n' + n P_{n-1}' - (2n+1) P_n = 0 \end{aligned}\right\} \left|\begin{matrix} \cdot n \\ + \\ -1 \end{matrix}\right| \text{или} \left|\begin{matrix} n+1 \\ + \\ -1 \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} &-P_{n+1}' + x P_n' + (n+1) P_n = 0 \quad (2) \\ &-x \cdot P_n' + P_{n-1}' + n P_n = 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \oplus \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

Итого: Вторая рекуррентная формула: $(2n+1) P_n = P_{n+1}' - P_{n-1}'$.

## 6.6 Многочлены Лежандра: дифференциальное ур-е и соотношение ортогональностей.

$$\begin{aligned} &(2)\ n \to n+1:\ -P_n' + x P_{n-1}' + n P_{n-1} = 0 \\ &(3)\ -x P_n' + P_{n-1}' + n P_n = 0 \end{aligned} \left|\begin{matrix} (-1) \\ + \\ \cdot x \end{matrix}\right.$$

$(1-x^2) P_n' + nx P_n - n P_{n-1}$ $\Big|\ \frac{d}{dx}$

$$[(1-x^2) P_n']' + n P_n + nx P_n' - \underset{\substack{\| (3) \\ -n(xP_n' - nP_n)}}{n P_{n-1}'} = 0$$

$[(1-x^2) P_n']' + n(n+1) P_n = 0 \Rightarrow$ функция $y(x) = P_n(x)$ явл. решением д.у $[(1-x^2)y']' + n(n+1) y = 0$ - д.у. для многочленов Лежандра

$$\begin{aligned} &[(1-x^2) P_n']' + n(n+1) P_n = 0 \\ &[(1-x^2) P_m']' + m(m+1) P_m = 0 \end{aligned} \left|\begin{matrix} P_m \\ \ominus P_n \end{matrix}\right.$$

$$\underbrace{[(1-x^2) P_n']' P_m - [(1-x^2) P_m']' P_n}_{A} + \underbrace{[n(n+1) - m(m+1)]}_{B} P_n P_m = 0$$

просто преобразуем

$$\left[(1-x^2)\left(P_n' P_m - P_n P_m'\right)\right]' = \left(\left[(1-x^2) P_n'\right] P_m - \left[(1-x^2) P_m'\right] P_n\right)' =$$

$$= \left[(1-x^2) P_n'\right]' P_m + (1-x^2) P_n' P_m' - \left[(1-x^2) P_m'\right]' P_n - (1-x^2) P_m' P_n' = A$$

$$B = (n^2+n) - (m^2+m) \overset{?}{=} (n-m)(n+m+1) = n^2 - mn + nm - m^2 + n - m$$

Значит: $\underbrace{\int_{-1}^{+1} \left[(1-x^2)\left(P_n' P_m - P_n P_m'\right)\right]' dx}_{\left[(1-x^2)(P_n' P_m - P_n P_m')\right]\Big|_{-1}^{+1} = 0} + \boxed{(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1} P_n P_m dx = 0}$

Значит: если $m \neq n$, то $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0$ т.е многочлены $P_0, P_1(x), \dots$
$\dots P_n(x)$ ортогональны друг другу с весом 1 на $(-1, 1)$

__Теорема__: Значит $P_0, P_1 \dots P_n \dots$ - (из формулы $*$) многочлены Лежандра, стандартизованные с помощью производ. функции

Вопрос: Чему равны $\|P_n\|$?

Найдём $\|P_n\|^2 = (P_n, P_n)_{L_2^h(-1,1)} = \int_{-1} P_n(x) \cdot P_n(x) dx = \int_{-1} P_n(x) P_n(x) dx = \boxed{\frac{2}{2n+1}}$ $n > 2$

Упр. $n = 1, 0$?

(1) Трехчленная рекур. $\Rightarrow (n+1) P_{n+1} - (2n+1) x P_n + n P_{n-1} = 0 \quad \Big| \cdot (2n-1) P_{n-1}$

$n \to n+1 \Rightarrow n P_n - (2n-1) x P_{n-1} + (n-1) P_{n-2} = 0 \quad \Big| \cdot (2n+1) P_n$

$$\int_{-1}^{1} (n+1)(2n-1) P_{n+1} P_{n-1} + \int_{-1}^{1} n(2n-1) P_{n-1}^2 - \int_{-1}^{1} n(2n+1) P_n^2 - \int_{-1}^{1} (n-1)(2n+1) P_n P_{n-2} dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x) dx \dots =$$

$$= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \dots \frac{3}{5} \underbrace{\int_{-1}^{1} P_1^2(x) dx}_{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{2}{2n+1}}$$

Итог: $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$ это есть соотношение ортогональностей для мног-в Лежандр. стандартизованных с помощью производящей функции

(6.7) Многочлены Лежандра. Формула Родрига и Теорема о Разложении функции в Ряд по многочленам Лежандра.

__Теорема__: Формула Родрига

$\forall n \geq 0$ справедлива формула Родрига:

$Q_n(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ где: $P_n$ - многочлены Лежандра, стандарт с помощью производящей функции

Идея Док-ва: Нужно убедиться, что $Q_n(x)$ есть многочлен степени $n$ с полож. старшим коэфф. и $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.

Тогда: следует из того, что ортогональные многочлены задаются весом однозначно.

<u>Теорема</u> (О разложении функции в ряд по многочленам Лежандра) Если $f: [-1;1] - \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема (дважды), то $\forall x \in [-1;1]$ справедливо равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$ где $P_n(x)$-многочлен Лежандра, стандартиз. с помощью производящей функции, и $C_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$

14.04.2021

Лекция 11 +18

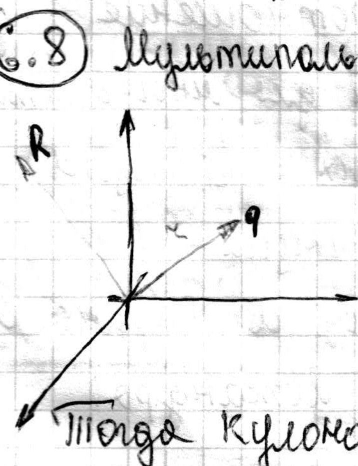
Идея док-ва: последовательность $\frac{P_0(x)}{\|P_0(x)\|}, \frac{P_1(x)}{\|P_1(x)\|}, \ldots, \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$ - является полной ортонормированной последовательностью в $L_2[-1;1]$

Значит $\forall f \in L_2[-1;1]$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{P_n}{\|P_n(x)\|}$, где $\lambda_n \left(f, \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}\right)$

в $L_2[-1;1]$ т. е $\left\|f - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}\right\|_{L_2[-1;1]} = 0$

Значит $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(f, P_n(x))}{\|P_n\|^2}}_{=C_n} P_n(x)$

(6.8) Мультипольное разложение полного потенциала.




$r$- радиус вектор точки, в котором находится заряд $q$: $r = |\vec{r}|$

$R$- радиус вектор наблюдателя

$\theta$- угол между $R$ и $\bar{r}$

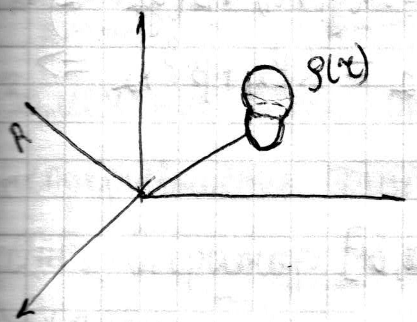
Тогда кулоновский потенциал равен $\Phi(\bar{R}) = \frac{q}{|\bar{R} - \bar{r}|} =$ Т. косинус

будем считать $R > r$

произв. функция

$$= \frac{q}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} = \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)}_{t}\underbrace{\cos\theta}_{x}+\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2}_{t^2}}} = \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Более физическая ситуация




$$\Phi(\bar R) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\bar r)\,dV}{|\bar R-\bar r|} = \frac{1}{R}\iiint\limits_V \sum_{n=0}^{\infty}\rho(\bar r)\,P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n dV$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n}{R^{n+1}}$$ — асимптотическое разложение для потенц. при $R\to\infty$

$$\sigma_n = \iiint\limits_V \rho(\bar r)\,P_n(\cos\theta)\,r^n\,dV$$

$\sigma_0 = \iiint\limits_V \rho(\bar r)\,dV$ — полный заряд тела $V$

$\sigma_1 = \iiint\limits_V \rho(\bar r)\cos\theta\cdot r\,dV$ — дипольный момент

$\sigma_2 = \iiint\limits_V \rho(\bar r)\,\frac{3\cos^2\theta+1}{2}\,r^2\,dV$ — квадрупольный момент

## §7. Ограниченные операторы в Гильбертовых пространствах

В этом параграфе $H, H_1, H_2$ и т.г. обозначают гильберт. простр-ва

### 7.1 Линейные операторы и их простейшие свойства:

Опр. Пусть $A: H\to H_1$ — отображение, такое что $\forall \alpha,\beta$ — числа, $\forall x,y\in H$ справедливы равенства $A(\alpha x+\beta y) = \alpha \underset{A(x)}{Ax} + \beta Ay$, то $A$ наз-ся линейным оператором.

Примеры операторов:

1) Тождественный оператор $I$ $\quad I: H\to H$, $Ix = x \ \forall x\in H$

$I(\alpha x+\beta y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha x + \beta y = \alpha I(x) + \beta I(y) \Rightarrow I$ лин

2) Нулевой оператор $O$ $\quad O: H\to H_1$, $Ox = 0 \ \forall x\in H$

$O(\alpha x+\beta y) = 0 = \alpha\cdot \underset{H_1}{0} + \beta\cdot\underset{H_1}{0} \overset{\text{опр}}{=} \alpha\cdot Ox + \beta\cdot Oy$

3) Конечномерный оператор $A$: $\dim H<\infty$, $\dim H_1<\infty$

изучали в линейной алгебре

4) Оператор ортогонального проектирования: Пусть $S\subset H$ — замкнутое подпростр.