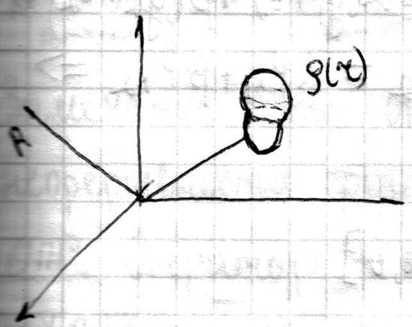
$$= \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}} = \frac{q}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)}_{t}\underbrace{\cos\theta}_{x} + \underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2}_{t^2}}} \overset{\text{произв. функция}}{=} \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Более физическая ситуация



$$\Phi(\bar R) = \iiint_V \frac{\rho(\bar r)\,dV}{|\bar R - \bar r|} = \frac{1}{R}\iiint_V \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\bar r)\,P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n dV =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{R^{n+1}}$ – асимптотическое разложение для потенц. при $R\to\infty$

$$\sigma_n = \iiint_V \rho(\bar r)\,P_n(\cos\theta)\,r^n\,dV$$

$\sigma_0 = \iiint_V \rho(\bar r)\,dV$ – полный заряд тела V

$\sigma_1 = \iiint_V \rho(\bar r)\cos\theta \cdot r\,dV$ – дипольный момент

$\sigma_2 = \iiint_V \rho(\bar r)\,\frac{3\cos^2\theta + 1}{2}\,r^2\,dV$ – квадрупольный момент

§7. Ограниченные операторы в Гильбертовых пространствах

В этом параграфе H, H_1, H_2 и т.д. обозначают гильберт. простр-ва

7.1 Линейные операторы и их простейшие свойства.

Опр. Пусть $A: H \to H_1$ – отображение, такое что $\forall \alpha, \beta$ – числа, $\forall x, y \in H$ справедливы равенства $A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underset{A(x)}{Ax} + \beta Ay$, то A наз-ся линейным оператором.

Примеры операторов:

1) Тождественный оператор I $\quad I: H \to H$, $Ix = x$ $\forall x \in H$

$I(\alpha x + \beta y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha x + \beta y = \alpha I(x) + \beta I(y) \Rightarrow I$ лин

2) Нулевой оператор O: $O: H \to H_1$, $Ox = 0$ $\forall x \in H$

$O(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha \cdot \underset{H_1}{0} + \beta \cdot \underset{H_1}{0} \overset{\text{опр}}{=} \alpha \cdot Ox + \beta \cdot Oy$

3) Конечномерный оператор A: $\dim H < \infty$, $\dim H_1 < \infty$

изучали в линейной алгебре

4) Оператор ортогонального проектирования: Пусть $S \subset H$ – замкнутое подпростр.

Из 5.5 $\Rightarrow \forall x \in H \quad \exists!\, y \in S$ и $\exists!\, z \in S^{\perp}$: $x = y + z$. Тогда полагают $Px = y$. Почему P - линейный?

Пусть $\underset{\in H}{x_1} = \underset{\in S}{y_1} + \underset{\in S^{\perp}}{z_1} \quad \underset{\in H}{x_2} = \underset{\in S}{y_2} + \underset{\in S^{\perp}}{z_2}$ Тогда $Px_1 = y_1 \quad Px_2 = y_2$

$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) =$

$= \underset{\in S}{(\alpha y_1 + \beta y_2)} + \underset{\in S^{\perp}}{(\alpha z_1 + \beta z_2)} \Rightarrow P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Px_1 + \beta Px_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P$ - линейный

5. Интегральный оператор. $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$

$(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$, где K - некоторая заданная функция, называемая ядром интегрального оператора.

ОПР Если $A: H \to H$, $B: H \to H$, - лин. операторы, то $\forall \alpha, \beta$ - числа зададим оператор $\alpha A + \beta B: H \to H$, с помощью формулы $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx \quad \forall x \in H$

свойство 1° оператор $\alpha A + \beta B$ - линейный

Док-во: $(\alpha A + \beta B)(sx + ty) \overset{опр}{=} \alpha A(sx + ty) + \beta B(sx + ty) = \alpha(sAx + tAy) + \beta(sBx + tBy) = s(\alpha Ax + \beta Bx) + t(\alpha Ay + \beta By) = s(\alpha A + \beta B)x + t(\alpha A + \beta B)y \Rightarrow \alpha A + \beta B$ - линейный

Опр Если $A: H \to H_1$ $B: H_1 \to H_2$, то зададим оператор $BA: H \to H_2$ с помощью формулы $(BA)x = B(\underset{\in H_1}{Ax}) \in H_2$. Оператор BA называется произведением опер A и B.

свойство 2: опер. BA - линейн.

Док-во: $(BA)(\alpha x + \beta y) \overset{опр}{=} B(A(\alpha x + \beta y)) \underset{A\text{-лин.}}{=} B(\alpha Ax + \beta Ay) \underset{B\text{ лин}}{=} \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) \overset{опр}{=} \alpha(BA) + \beta(BA) \Rightarrow BA$ линейный.

Замечание: линейные операторы играют важную роль в кв. Механике. Самыми известными операторами в квантах явл. операторы импульса и операторы координат. Они неограниченные операторы.

7.2 Непрерывные и ограниченные операторы.

ОПР. Оператор $A: H_0 \to H_1$ называется непрерывным в т. $x_0 \in H$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x \in H$ таких, что $\|x - x_0\| < \delta$ обязательно выполняется неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Другими словами, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax_0$

Замечание: Это определение в точности повторяет определение непрерывности функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в (·) $x_0 \in \mathbb{R}$ курса мат анализа.

ОПР. Оператор $A: H \to H_1$ наз-ся непрерывным, если он непрерывен $\forall x \in H$.

ОПР. Множество $X \in H$ наз-ся ограниченным если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса. Др. словами, если $\exists R < \infty : \forall x \in X$ выполняется неравенство

ОПР. Оператор $A: H \to H_1$ наз-ся ограниченным, если он переводит любое ограниченное множество снова в огр. множество т.е если $\forall X \in H$ - огр множество: $AX = \{y \in H_1 \mid \exists x \in X: y = Ax\}$ явл. ограничен.

<u>Теорема</u> (о непрерывных и ограниченных операторах): Пусть $A: H \to H_1$ - линейный, тогда след. утверждения эквивалентны:

(1) $\exists x_0 \in H$: A - непрерывна в (·) x_0

(2) A - непрерыв

(3) A - ограниченный

(4) $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < +\infty$

Док-во: (1 => 2) Дано: A - непрер. в (·) x_0 т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Фиксируем $x_1 \in H$ и убедимся, что A - непрерывен (·) x_1

Для (·) x_1 при любом $\varepsilon > 0$ будем брать то же самое $\delta > 0$, которое уже существует для (·) x_0: $\|y - x_1 \pm x_0\| < \delta \Rightarrow \|(y - x_1 + x_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ay - Ax_1 + Ax_0 - Ax_0\| < \varepsilon \Rightarrow$ A непр. в т. x_1

Если оператор разрывен в одной точке => он всюду разрывен.

(2 => 3) Дано: A - непрерывен; в частности A непрерывен в т. $x = 0$.

Значит для $\varepsilon = 1 \ \exists \delta > 0: \|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon = 1$

21.04.2021

Лекция 12+16

Нужно доказать, что A-ограничен. Фиксируем $X \subset H$ - огр. множество $\Rightarrow \exists 0<R<+\infty : \forall x \in X \ \|x\| \le R$. Тогда $\forall x \in X$:

$$\|Ax\| = \|\frac{R}{\delta} A\left(\frac{\delta x}{R}\right)\| = \frac{R}{\delta}\|A(\frac{\delta}{R}x)\| \le \frac{R}{\delta} = const. \Rightarrow AX\text{-огр.} \Rightarrow A\text{-огр.}$$

$$\|\frac{\delta}{R}x\| = \frac{\delta}{R}\|x\| \le \frac{\delta}{R}R = \delta$$

$\boxed{(3)\Rightarrow(4)}$ $\bar{B}(0,1) = \{x \in H : \|x\| \le 1\}$ - огр. множество; A - огр. оператор $\Rightarrow$ $\Rightarrow A(\bar{B}(0,1))$ - огр. множество в H_1 $\Rightarrow \exists 0<R<+\infty : \forall y \in A(\bar{B}(0,1)) \ \|y\| < R$ $\Rightarrow \forall x \in \bar{B}(0,1)$ $Ax \in A(\bar{B}(0,1)) \Rightarrow \|Ax\| \le R \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le R < +\infty$

$\boxed{(4)\Rightarrow(1)}$ Дано: $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = R < +\infty$. Убедиться, что A - оператор, ограниченный в (·) $x_0 = 0$. т.е. нужно $\forall \varepsilon > 0$ найти $\delta > 0$: из $\|x-0\| < \delta$ следует $\|Ax - 0\| < \varepsilon$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$. Тогда $\forall x \in H$: $\|x\| < \delta = \frac{\varepsilon}{R}$.

Имеем $\|Ax\| = \|\,\|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \le \frac{\varepsilon}{R} \cdot \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \le \frac{\varepsilon}{R} \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|Ay\| \le \frac{\varepsilon}{R}\cdot R = \varepsilon \Rightarrow$ A - непрер в (·) $x=0$

Если $x=0$, то $\|Ax\| = \|0\| = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

7.3 Норма оператора:

Изучим более подробно выражение $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$, т.к. его конечность эквивалентно непрерывности опер. A

Лемма Пусть H, H_1 - гильбертовы простр-ва: $A : H \to H_1$ - линейный оператор. Тогда

$$\underbrace{\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|}_{\alpha} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|}_{\beta} = \underbrace{\sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\gamma}$$

Док-во: План: $\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \alpha$.

$\alpha \ge \beta$: Очевидно

$\beta \ge \gamma$: $\forall x \ne 0$: $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \le \sup\limits_{\|y\|=1}\|Ay\|$ $\quad \|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$

Значит $\underbrace{\sup\limits_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{=\gamma} \le \beta \Rightarrow \beta \ge \gamma$

$\gamma \ge \alpha$: $\forall x \in H$ $0<\|x\| \le 1$ имеем $\|Ax\| \le \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{y\ne 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma$

Если же $x=0$, то имеем $\|Ax\| = \|0\| = 0 \le \gamma$. Следовательно $\alpha = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le \gamma$ ЧТД.

Опр Общее значение выражений α, β, γ из леммы наз-ся нормой оператора A. Обозн.: $\|A\|$

Теорема „о свойствах нормы линейного оператора"

Пусть A, B - лин. операторы; α, β - числа; Тогда:

1) $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$,
3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

} для нормы оператора выполняются аксиомы нормы

4) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\forall x$ - вектор в H; $A: H - H$,
5) $\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$
6) $\big|\|A\| - \|B\|\big| \leq \|A - B\|$

Док-во ① $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\|Ax\|}_{\geq 0} \geq 0$ Если $A = 0$, то $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|\underbrace{Ax}_{0 \in H}\| = 0$ И наоборот:

$\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \underbrace{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$ т.е $\|\underbrace{Ax}_{\in H}\| = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ax = 0 & \forall x \neq 0 \\ Ax = 0 & \text{при } x = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$

② Фиксируем $x \in H: \|x\| \leq 1$. Тогда $\|(\alpha A)x\| = \|\alpha \cdot \underbrace{Ax}_{\in H}\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| = |\alpha| \cdot \|A\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \overbrace{\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(\alpha A)x\|}^{\|\alpha A\| \text{ - договорились так}} \leq |\alpha| \cdot \|A\|$

Пусть $\alpha \neq 0$. $|\alpha| \cdot \|A\| = |\alpha| \cdot \|\frac{1}{\alpha}(\alpha A)\| \leq |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| = \|\alpha A\|$ Это нер-во верно и для $\alpha = 0$

③ Фиксируем $\|x\| \leq 1$. Тогда: $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| + \ldots = \|A\| + \|B\|$. Значит $\underbrace{\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(A+B)x\|}_{\|A+B\|} \leq \|A\| + \|B\|$

④ Фиксируем $x \neq 0$ Тогда $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\|$ Значит

$\forall x \neq 0 \ \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ Оно очевидно выполняется при $x = 0$ $(0 = 0)$

⑤ Фиксируем $\|x\| < 1$ Тогда $\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \overset{(4)}{\leq} \|B\| \cdot \|Ax\| \overset{(4)}{\leq} \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ Значит $\underbrace{\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(BA)x\|}_{\|BA\|} \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Упр: Док-те, что равенство $\|BA\| = \|B\| \cdot \|A\|$ не всегда выполняется
придумай!

⑥ Нужно док-ть два неравенства: $\underbrace{-\|A-B\| \leq \overline{\|A\| - \|B\|} \leq \|A-B\|}$

Док-м ⌐ : $\|A\| = \|(A-B)+B\| \overset{(3)}{\leq} \|A-B\| + \|B\|$ Аналогично доказывается ⌊

Пример: (матрица и норма конечномерного оператора): Воспоминания из линейной алгебры: Пусть $A: H \to H_1$ - линейный оператор; H-гильберт. пространство; $\dim H = n < +\infty$; $x_1, \ldots, x_n$ - ортонормированный базис в H; $\dim H_1 = m < +\infty$; $y_1 \ldots y_m$ - ортонорм. базис в H_1. Тогда $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$, где $\lambda_j = (x, x_j)$, в частности $|\lambda_j| \leq \|x\| \cdot \|x_j\| = \|x\|$.

Тогда: $Ax = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k y_k$

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{A x_j}_{\in H_1} \overset{=}{\quad} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\right) y_k, \qquad A x_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k$$

$$\forall k \quad \mu_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Матрица опер. } A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\forall x \in H: \|x\| < 1$ имеем $\|Ax\| = \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\right) y_k \right\| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| \cdot \underbrace{|\lambda_j|}_{\leq \|x\| \leq 1} \cdot \overbrace{\|y_k\|}^{1} \leq$

$\leq \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$. Значит $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| = const < +\infty$

Это есть оценка нормы оператора A через элементы его матрицы. Следствие: Если $\dim H < +\infty$, $\dim H_1 < +\infty$, то всякий лин оператор $A: H \to H_1$ непрерывен (т.е ограничен)

28.04.2021

Лекция 13. Задача №9 - необязательная

7.4. Сходимость операторов и операторные ряды.

ОПР: Пусть H, H_1 - гильбертовы простр. $A: H \to H_1$ - лин оператор и $\forall n$ $A_n: H \to H_1$. Говорят, что A_n сходится к A при $n \to \infty$, если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$

Обозначение: $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ или $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$

Свойства сходящихся послед. операторов.

(1) Линейность предела

① Если $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$, то $\forall \alpha, \beta$ - числа $\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A + \beta B$

Док-во: $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| = \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| \leq \|\alpha\| \cdot \|A_n - A\| + |\beta| \cdot \|B_n - B\| \to 0$ ЧТД.

② Если $\forall n$ $\|A_n\| < +\infty$ и $A_n \to A$, то $\|A\| < +\infty$ и $\|A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|A\|$

Док-во: Фиксируем n_0: $\|A_{n_0} - A\| \leq 1$. Тогда $\|A\| = \|(A - A_{n_0}) + A\| \underset{\text{треуг}}{\overset{\text{нер-во}}{\leq}} \|A - A_n\| + \|A_{n_0}\| \leq 1 + \|A_{n_0}\| < +\infty$

$$\big|\, \|A_n\| - \|A\| \,\big| \overset{\text{св-во 6 из теор. о норме опер.}}{\leq} \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|A\| \text{ ЧТД.}$$

Теорема (о полноте пространства операторов)

Если H, H_1 - гильбертовы простр-ва, то пространства линейных ограниченных операторов $H \to H_1$ с операторной нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$, где $A: H \to H_1$ полно, т.е всякая фундаментальная последовательность сходится.

ОПР Пусть $\forall n$ задан оператор $A_n: H \to H_1$. Операторным рядом наз-ся формальное выражение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ (*)

Конечная сумма $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n$ наз-ся частичной суммой ряда (*)

Говорят, что ряд (*) сх-ся, если сх-ся последовательность его частичных сумм. При этом предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_N$ - наз-ся суммой ряда. и обозначается $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, т.е $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} A_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$.

Свойства операторных рядов:

① Линейность: $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$, то $\forall \alpha, \beta$ - числа, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$

Док-во: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \left[\alpha \cdot \sum\limits_{n=0}^{N} A_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{N} B_n\right] = \alpha A + \beta B$ ЧТД

② Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$ сх-ся. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ сходится и $\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$

Док-во: Дано: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$ сх-ся. $\Rightarrow$ выполняется критерий Коши сходимости числового ряда: $\forall \varepsilon>0\ \exists n(\varepsilon): \forall m>n(\varepsilon)\ \forall p \geq 0\ (+1)$ т.ч

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$$

Нужно доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ -сх-ся, т.е сходится последовательность его частичных сумм. $S_N = \sum_{n=0}^{N} A_n$. Так как пространство операторов полно, то достаточно доказать, что последовательность частичных сумм $S_1, S_2, \dots, S_N \dots$ -фундаментальна.

$$\|S_{m+p} - S_m\| = \left\|\sum_{n=0}^{m+p} A_n - \sum_{n=0}^{m} A_n\right\| = \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n\right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$$

Значит $S_1, S_2 \dots S_N$ -фундаментальна; а значит $\sum_{n=0}^{N} A_n$ сходится

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\| = \|\lim_{N\to\infty} S_N\| = \lim_{N\to\infty} \|S_N\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=0}^{N} A_n\right\| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|A_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$$ ЧТД.

7.5 Обратимость операторов, обратные операторы.

ОПР (1) Говорят что опер $A: H \to H_1$ является обратимым, если $\forall y \in H_1$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$. Другими словами (2): A- обратимый, если ур-е $Ax=0$ имеет только нулевое решение

Док-во: (1) → (2) -очевидно, нужно взять $y=0$;

(2) → (1) Предположим, что ур-е $Ax=0$ имеет только нулевое решение; но $\exists y \in H_1: \exists x_1$ и $x_2 \in H,\ x_1 \neq x_2,\ Ax_1 = y = Ax_2$.

Тогда $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = 0$ Значит $x_1 - x_2 \neq 0$ явл. ненулевым решением ур-я $Ax=0$. Противоречие.

ОПР Образом оператора $A: H \to H_1$ наз-ся $\{y \in H_1 : \exists x \in H\ y = Ax\}$

Обозначение: $\operatorname{Im} A$

Лемма: $\operatorname{Im} A$ явл. подпространством в H_1

Док-во: $\underbrace{y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A}$. Нужно убедиться, что $\forall \alpha, \beta$ -числа $(\alpha y_1 + \beta y_2) \in \operatorname{Im} A$

$\exists x_1, x_2 \in H: Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$ Т.к. H-линейное простр. то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$

т.к A -лин. оператор, то $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$.

Значит $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} A$ ЧТД.

Опр. Пусть $A: H \to H_1$ явл. обратимым. Тогда $\forall y \in \operatorname{Im} A$ можно сопоставить тот единственный вектор $x \in H$: $Ax = y$. Тем самым возникает отображения $\operatorname{Im} A \to H$ (кот. сопоставляет вектору $y \in \operatorname{Im} A$ вектор $x \in H$: $Ax = y$) котор. и наз. обратным оператором к A

Обозн A^{-1}

Другими словами: Если A - обратим и $y \in \operatorname{Im} A$, то $Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1} y$

Замечание: Оператор A^{-1} определён не во всем пространстве H_1, а только на $\operatorname{Im} A$. Для симметрии было бы естественно считать что A тоже не определен во всем H (но мы так делать не будем). В таком случае область опр. A обозначим. $\operatorname{dom} A$

Свойства обратного оператора:

(1) $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{Im} A$ (очевидно по опр)

(2) A^{-1} линейный (уже доказано при док-ве леммы)

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$\alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$$

(3) Пусть $A: H \to H_1$, $B: H_1 \to H_2$ - лин. обратимые операторы. Тогда $BA: H \to H_2$ - лин обрат и $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

Док-во: Линейность BA уже доказано в 7.1.

Обратимость $(BA)x = y \Leftrightarrow B(Ax) = y$. Но уравнение $Bz = y$ имеет не более одного решения z, кот. может быть записано в виде: $z = B^{-1} y$ т.е $Ax = B^{-1} y$. Т.к A - обратимый, то последнее ур-е имеет не более одного решения x, кот может быть записано в виде $x = A^{-1}(B^{-1} y)$. Значит BA обратим и ур-е $(BA)x = y$ имеет не более одного решения, которое может быть записано в виде $x = (BA)^{-1} y$. Значит $\forall y$ $(BA)^{-1} y = A^{-1}(B^{-1} y) \Rightarrow (BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ ЧТД.

(4) Пусть $A: H \to H_1$ - лин. оператор. $B: H_1 \to H$ - лин. оператор. $I_H: H \to H$ - тождественный оператор простр-ва H. $I_{H_1}: H_1 \to H_1$ - тождест. оператор простр-ва H_1 и пусть $BA = I_H$ и $AB = I_{H_1}$. Тогда

оператор A обратим и $A^{-1}=B$

Док-во обратимости A от противного. Допустим, что A - не обратим, т.е $\exists y \in H_1$ $\exists x_1, x_2 \in H$, $x_1 \neq x_2$ $Ax_1 = y = Ax_2$. Тогда

$$\underset{\substack{\parallel \\ I_H x_1 = x_1}}{B(Ax_1)} = By = \underset{\substack{\parallel \\ I_H x_2 = x_2}}{B(Ax_2)}$$

Противоречие с $x_1 \neq x_2$

Докажем формулу $B = A^{-1}$

$$AB = I_{H_1} \Rightarrow \forall y \in H_1 \quad \underset{\substack{\parallel \\ A(By)}}{(AB)y} = I_{H_1} y = y$$

Так как A-обратимый, то ур-е будет иметь не более одного решения, которое может быть записано в виде $By = A^{-1}y$. $\forall y \in H_1$. Значит $B = A^{-1}$ ЧТД

7.6 Теорема Неймана

5.05.2021

Лекция 14

<u>Теорема</u> (фон Нейман) Пусть H - гильбертово пространство. $A: H \to H$ - линейный ограниченный оператор такой, что $\|A\| < 1$ и $\operatorname{dom} A = H$. Тогда оператор $I - A$ обратим, $(I-A)^{-1}$ - ограничен, $\operatorname{dom}(I-A)^{-1} = H$, и

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad \text{где} \quad A^0 = I_{(H)}^{\text{в простр-ве}}, \quad A^{n+1} = A \cdot A^n \ \forall n \geq 0$$

Док-во: опирается на вычисление $\|A^n\| = \|A \cdot A^{n-1}\| \leq$ (норма произведения операторов не превосходит их норм)

$$\leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \|A\|^2 \cdot \|A^{n-2}\| \leq \ldots \leq \|A\|^n \cdot \|\underset{\substack{\parallel \\ I_H}}{A^0}\| = \|A\|^n \xrightarrow[\text{т.к } \|A\|<1]{} 0 \text{ при } n \to \infty$$

Значит (а) $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к $\|A^n\| \leq \|A\|^n \to 0$ при $n \to \infty$

по определению сходимости операторов

б) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ сходится, т.к сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$$

и св-ва 2 в п. 7.4 (если ряд из норм операторов сх-ся, то сходится сам операторный ряд)

Следовательно:

$$(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} A^n - \left(\sum_{n=0}^{N} A^{n-1}\right) = I - A^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

$A^{N+1} \to 0$, $\quad \sum_{n=0}^{N} A^{n-1} = \sum_{n=1}^{N+1} A^n$

$$\underbrace{(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^n}_{} \quad \downarrow N\to\infty \quad (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Аналогично доказывается равенство: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)(I-A) = I$

Значит, по свойству 4. п. 7.5 оператор $I-A$ обратим, $\operatorname{dom}(I-A)^{-1} = H$, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$,

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$$

Замечательно! Теорема Неймана утверждает, что в школьную формулу для суммы геометрической прогрессии

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $|q|<1$ можно подставить оператор A, если $\|A\|<1$

7.7 Спектр оператора.

Пусть $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим уравнения $Ax - \lambda x = y$ или $(A-\lambda I)x = y$ при разных $y \in H$. Выделим 4 случая, которые могут встречаться

1) $\nexists (A-\lambda I)^{-1}$
2) $\exists (A-\lambda I)^{-1}$, причем $\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} = H$
3) $\exists (A-\lambda I)^{-1}$, причем $\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} \neq H$, но $\operatorname{cl}[\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1}] = H$
4) $\exists (A-\lambda I)^{-1}$, причем $\operatorname{cl}[\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1}] \neq H$

Рассмотрим эти случаи подробно:

1) В этом случае $\exists x \neq 0 : Ax - \lambda x = 0$. При этом (как в лин. алгебре) число λ наз. собственным значением оператора A, а вектор $x \neq 0$ такой, что $Ax = \lambda x$ называется собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений оператора A наз-ся точечным спектром и обозначается через $\sigma_p(A)$, „p" от слова point

2) В этом случае говорят, что λ является регулярным значением

~~ератора~~ A. ~~Если~~ Множество всех регулярных значений оператора A обозначают через $\rho(A)$ и называют **резольвентным множеством** оператора A. Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ называют резольвентным оператором, поскольку он разрешает (резовы) уравнение $(A-\lambda I)x = y \Leftrightarrow x = R_\lambda y = (A-\lambda I)^{-1} y$

Оказывается, для $\lambda \in \rho(A)$ оператор R_λ автоматически является ограниченным. Это следует из теоремы Банаха об обратном операторе, которую мы выучим без док-ва: $\boxed{\text{Теорема}}$ Если H, H_1 - гильбертовы пространства. $B: H \to H_1$ - линейный ограниченный обратимый оператор, причём $\operatorname{dom} B^{-1} = H_1$, то оператор B^{-1} является ограниченным

Опр Множ-во $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ наз-ся спектром оператора A

(3) В этом случае говорят, что λ принадлежит непрерывному спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_c(A)$. „c" от слова continuous - непрер.

(4) В этом случае говорят, что λ принадлежит **остаточному** спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_r(A)$ „r" от слова „residual"

Замечание: в лин. алгебре спектром называли совокупность всех собственных чисел т.е подразумевался точечный спектр, (другими словами в линейной алгебре $\sigma_c = \sigma_r = \varnothing$)

Простейшие **свойства** спектра

(1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \varnothing$

(2) Спектр оператора A содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$ с центром в ~~круге~~ нуле т.е

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|A\|\}$$

(3) Спектр является замкнутым множеством

Док-во: (1) непосредственно следует из определения

(2) Оно эквивалентно тому, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > \|A\|$ имеем $\lambda \in \rho(A)$. Последнее следует из вычисления

$$(A-\lambda I)^{-1} = \left[-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right]^{-1} = \left[(-\lambda I)\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right]^{-1} = \left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda}I\right)$$

где: $(-\lambda I)$ - очевидно обратим и $dom\,(-\lambda I)^{-1} = H$

$(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$ - обратим и $dom\,(I-\lambda I)^{-1} = H$ по т. Неймана. т.к $\| \frac{1}{\lambda}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$

$(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}(-\frac{1}{\lambda}I)$ - обратим и его $dom(\ ) = H \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ ЧТД.

Свойство (3) может быть доказано аналогично св-ву (2) (т.е с помощью теоремы Неймана) но мы этого делать не будем

(7.8) Линейные функционалы. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала. Сопряжённое простр-во

Опр. ~~линейным фун~~ Линейным функционалом наз-ся линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H во множество чисел (в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Пример: $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = \underbrace{(x, x_0)}_{\text{скаляр произв}}$ задаёт линейный функционал $f: H \to \mathbb{C}$

Замечание: Поскольку функционал является оператором, то мы уже знаем много понятий про функционалы: Норма, ограниченность, непрерывность, сходимость, Но есть еще одно понятие, которое нам не встреч.

Опр. Множество $\{x \in H : f(x) = 0\}$ называется ядром функционала f и обозначается через $\ker f$

Свойства линейных функционалов

1) $\forall f: H \to \mathbb{C}$ $\ker f$ явл. линейным подпространством H
2) Если f - непрерывен, то $\ker f$ замкнуто
3) Если f - ненулевой непрерывный линейный функционал, то $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$
4) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт линейный непрерывный функционал, причём $\|f\| = \|x_0\|$.
5) $\forall$ линейного непрерывного функционала $f: H \to \mathbb{C}$ $\exists!\, x_0 \in H$: $f(x) = (x, x_0)$ $\forall x \in H$, при этом $\|f\| = \|x_0\|$

Докажем некоторые свойства: $\boxed{\text{Теорема Рисса}}$ - это св-ва 4 и 5

Док-во: (1) Если $x, y \in \ker f$; то $f(x) = f(y) = 0$. Значит $\forall \alpha, \beta$ - числа $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ т.е $\alpha x = \beta y \in \ker f$. ЧТД

(2) Если $x_k \in \ker f$ $\forall n$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, то в силу непрерывности

функционала f имеем $f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Значит $x_0 \in \operatorname{Ker} f$. Другими словами $\operatorname{Ker} f$ замкнуто ЧТД

(4) $$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |(x, x_0)| \underset{\text{нер. КБШ}}{\le} \sup_{\|x\|\le 1} \|x\|\cdot\|x_0\| = \|x_0\|$$

Чтобы оценить норму f снизу, будем различать два случая: $x_0 = 0$ и $x_0 \ne 0$.

$x_0 = 0$: $$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\underbrace{(x, \overset{=0}{x_0})}_{0}| = 0 = \|x_0\| = 0$$

$x_0 \ne 0$: $$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |(x, x_0)| \ge \left(\begin{matrix}\text{подставляем} \\ x = \frac{x_0}{\|x_0\|}\end{matrix}\right) \ge \left|\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0\right)\right| =$$

$$= \frac{|(x_0, x_0)|}{\|x_0\|} = \|x_0\|.$$ Тем самым мы доказали, что $\|x_0\| \le \|f\| \le \|x_0\|$, и значит $\|f\| = \|x_0\|$ ЧТД.

ОПР. Множество всех непрерывных линейных функционалов, определённых на H, называется сопряжённым к H пространством и обозначается H^*

7.9 Бра- и кет-векторы

Бра- и кет-векторы – это основа так называемого формализма Дирака, предложенного Полем Дираком – одним из основателей квантовой механики. Этот формализм прочно вошёл в физическую литературу с 1930 годов

$(x, y) =$	$\langle y \mid x \rangle$	$= \{\langle y\mid\}\{\mid x\rangle\}$
Это обычное скалярное произведение. Оно линейно по первому аргументу (по x)	Перепишем „обычное" скаляр. произведение таким способом. В частности, будем считать что оно линейно по второму аргументу (по x)	Мысленно разделим выражение $\langle y\mid x\rangle$ на два самостоятельных объекта $\langle y\mid$ и $\mid x\rangle$

ОПР. Символ $|x\rangle$ называют <u>кет-вектором</u> и отождествляют с вектором x исходного гильбертова простр-ва H. Символ $\langle y|$ называют <u>бра-вектором</u> и отождествляют с линейным непрерывным функционалом на H, т.е с вектором из H^* (см. теорему Рисса п 7.8)

Замечание: Название происходит от слова bracket - скобка

Вопрос: Зачем удваивать пространство?

Пример 1 (Разложение тождественного оператора, или правило сокращения): Пусть H - гильбертово пространство; $\dim H = n$; $x_1, \dots x_n$ - ортонормированный базис в H. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k| = I$$ - тождественный оператор в H

Вычисления будем вести в „обычных" и бра-кет обозначениях

$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, где α_k - коэфф. Фурье	$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle \alpha_k$, где $\alpha_k = \langle x_k|x\rangle$
$x = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k$	$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|x\rangle = \left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|\right\} |x\rangle$
$x = Ix$	$I = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|$

Пример 2. (Нахождение резольвентного оператора)

Пусть H - гильбертово пространство; $\dim H = n$; $x_1, \dots, x_n$ - собственные векторы оператора $A: \to H$ (т.е $\forall k = 1, \dots n$ $Ax_k = \lambda_k x_k$, λ_k - собственное значение оператора A), причем пусть $x_1, \dots x_n$ - является ортонормированным базисом в H. Тогда:

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$$

Чтобы ~~ввести~~ вывести эту формулу, нам нужно $\forall y \in H$ найти $x \in H$, являющийся решением уравнения $(A - \lambda I)x = y$, т.е такой, что $x = (A - \lambda I)^{-1} y$. Вычисления будем вести в обычных и бра-кет обозн

$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $\alpha_j = (x, x_j)$	$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j$, $\alpha_j = \langle x_j|x\rangle$
$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, $\beta_j = (y, x_j)$	$|y\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \beta_j$, $\beta_j = \langle x_j|y\rangle$
$A = \lambda_j x_j$	$|x_j\rangle A = |x_j\rangle \lambda_j$

$Ax - \lambda x = y$

$A\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right) - \lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda x_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$$

$$\alpha_j\lambda_j - \alpha_j\lambda = \beta_j \qquad \forall j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} \qquad \forall j$$

$$x = \sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\lambda_j-\lambda}x_j$$

$$x = \sum_{j=1}^{n}\frac{(y, x_j)}{\lambda_j - \lambda}x_j$$

$$x = (A - \lambda I)^{-1}y$$

$|x\rangle A - |x\rangle\lambda = |y\rangle$

$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j\right)A - \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j\lambda = \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\beta_j$

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\lambda_j\alpha_j - \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j\lambda = \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\beta_j$$

$$\lambda_j\alpha_j - \alpha_j\lambda = \beta_j \qquad \forall j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j-\lambda} \qquad \forall j$$

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\frac{\beta_j}{\lambda_j-\lambda}$$

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n}|x_j\rangle\frac{\langle x_j|y\rangle}{\lambda_j-\lambda}$$

$$|x\rangle = \left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j-\lambda}\right\}|y\rangle$$

Значит

$$(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j-\lambda}$$

7.10 Оператор, сопряжённый к ограниченному.

ОПР Пусть H и H_1 - гильбертовы пространства, $A: H \to H_1$ - линейный и ограниченный оператор. Фиксируем $x_0 \in H_1$ и построим функционал $f: H \to \mathbb{C}$ по формуле:

$$f(x) = (Ax, x_0) \qquad \forall x \in H$$

нер-во КБШ.

Этот функционал линеен и непрерывен (т.к $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{|(Ax,x_0)|}{\|x\|} \leq$

$\leq \sup\limits_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Ax\|\cdot\|x_0\|}{\|x\|} = \|x_0\|\cdot\|A\| < +\infty$ (норма любого вектора из H конечна)

Из теоремы Рисса $\Rightarrow \exists!\ x_1 \in H : f(x) = (x, x_1)\ \forall x \in H$. Тем самым возникло отображение из $H_1 \to H$, которое каждому $x_0 \in H_1$ сопоставляет $x_1 \in H$. Будем обозначать это отображение $A^*: H_1 \to H$. и называть оператором, сопряжённым к A. При этом имеем $(Ax, x_0) = f(x) = (x, A^*x_0)$

Другими словами: Если опустить обоснования, то $A^*: H_1 \to H$ это оператор, задаваемый равенством $(Ax, x_0) = (x, A^*x_0)$ $\forall x \in H$ и $\forall x_0 \in H_1$

При изучении свойств сопряжённого оператора часто бывает полезна следующая мини-лемма:

<u>Лемма</u>. Если H - гильбертово пространство и векторы $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H$ выполняется равенство $(x,z)=(y,z)$, то $x=y$

Док-во $(x,z)=(y,z) \Leftrightarrow (x,z)-(y,z)=0 \Leftrightarrow (x-y,z)=0$

Поскольку любое из этих равенств справедливо $\forall z \in H$, то можем подставить $z=x-y$ в последнее равенство $(x-y, x-y)=0 \underset{\text{аксиома скал. произв}}{\Leftrightarrow} x-y=0$ т.е $x=y$. ЧТД.

Замечание: мини лемма позволяет установить равенство векторов „безкоординатным" способом

<u>Свойства оператора</u>, сопряжённого к ограниченному (здесь H, H_1, H_2 - гильбертовы простр-ва; $A: H \to H_1$, $B: H \to H_1$, $C: H_1 \to H_2$, α, β -числа)

① A^* является линейным ограниченным оператором, причём $\|A^*\| \leq \|A\|$

Док-во: Пусть $x \in H$. Фиксируем $y_1, y_2 \in H_1$. Тогда $(x, A^*(\alpha y_1+\beta y_2)) \overset{\text{опр}}{=} (Ax, \alpha y_1+\beta y_2) = \bar{\alpha}(Ax, y_1)+\bar{\beta}(Ax, y_2) \overset{\text{опр}}{=} \bar{\alpha}(x, A^*y_1)+\bar{\beta}(x, A^*y_2) =$
$= (x, \alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2)$

Т.к равенство $(x, \alpha A^*y_1+\beta A^*y_2)$ справедливо $\forall x \in H$, то по мини лемме $A^*(\alpha y_1+\beta y_2) = \alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2$. $\forall y_1, y_2 \in H_1$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа. Значит A^* - линеен

Теперь оценим норму A^*:

$$|(x, A^*y)| \overset{\text{опр}}{=} |(Ax, y)| \overset{\text{КБШ}}{\leq} \|Ax\| \cdot \|y\| \underset{\text{свойство опер. нормы}}{\leq} \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Подставим сюда $x = A^*y$, получим

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y, A^*y) \leq \|A\| \cdot \|A^*y\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|A^*y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$$

Следовательно

$$\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^*y\|}{\|y\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \|A\| \quad \text{ЧТД}$$

② $\cancel{(\alpha A^* + \beta B)^*} = (\alpha A+\beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$

Док-во Пусть $x \in H$ и $y \in H_1$ -произвольные векторы

Тогда $(x, (\alpha A+\beta B)^* y) \overset{\text{опр}}{=} ((\alpha A+\beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) =$

$= \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha(x, A^*y) + \beta(x, B^*y) = (x, \bar{\alpha}A^*y + \bar{\beta}B^*y)$.

По мини лемме: вектора $\bar{\alpha}A^*y + \bar{\beta}B^*y$ равны друг другу!

$$(\alpha A + \beta B)^* y = (\bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*)y \quad \forall y \in H,$$

Значит $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$ ЧТД

③ $(A^*)^* = A$

Док-во Сначала отметим, что если $A: H \to H_1$, то $A^*: H_1 \to H$ и $(A^*)^*: H \to H_1$. Для любых $x \in H_1$ и $y \in H$ имеем $(x, (A^*)^*y) \overset{\text{опр}}{=}$
$= (A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} \overset{\text{опр}}{=} \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$

Из (x, Ay) по мини лемме получаем $(A^*)^*y = Ay \quad \forall y \in H$.

Значит $(A^*)^* = A$ ЧТД

④ $\|A^*\| = \|A\|$

Док-во: $\|A^*\| \overset{①}{\leq} \|A\| \overset{③}{=} \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$. Значит $\|A^*\| = \|A\|$ ЧТД.

⑤ Если I - тождественный оператор $(I: H \to H)$, то $I^* = I$

Док-во: $\forall x, y \in H$ имеем $(x, I^*y) \overset{\text{опр}}{=} (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$. $\overset{\text{мини лемма}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow I^*y = Iy \quad \forall y \in H \Rightarrow I^* = I$ ЧТД

⑥ $(CA)^* = A^*C^*$, где $A: H \to H_1$, $C: H_1 \to H_2$.

Док-во: $(x, (CA)^*y) \overset{\text{опр}}{=} ((CA)x, y) = (C(Ax), y) \overset{\text{опр}}{=} (Ax, C^*y) = (x, A^*(C^*y)) =$
$= (x, (A^*C^*)y) \Rightarrow (CA)^*y = (A^*C^*)y \quad \forall y \Rightarrow (CA)^* = A^*C^*$ ЧТД.

• Замечание: свойства 1-6 известны нам из линейной алгебры. Мы убедились, что они не только для конечномерных операторов. Из семинаров мы знаем, что точечный спектр найти проще всего, а остаточный сложнее всего. Следующая теорема сводит эту сложную задачу к простой, но только для сопряжённого оператора

Теорема (О применении сопряженного оператора к нахождению остаточного спектра оператора) (без док-ва) Пусть H, H_1 — гильбертовы простр-ва. $A: H \to H_1$ - линейный огр. оператор и $\lambda \notin \sigma_p(A)$ Тогда след 2 утв эквивалентны

1) $\lambda \in \sigma_r(A)$
2) $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$

12.05.2021

Лекция 15 (+16)

7.11 Самосопряжённые операторы

В этом пункте H, H_1 - гильбертовы простр-ва, $A: H \to H$ огр. лин. пр-во

ОПР Говорят, что огр. линейный оператор $A: H \to H$ явл. самосопряжённым если $A^* = A$, т.е если $\forall x, y \in H$ имеем $(Ax, y) = (x, Ay)$

Теорема (о точечном спектре самосопряжённого огр. операт.)

Пусть $A: H \to H$ самосопр. огр. оператор, тогда любое собственное значение этого оператора явл. веществ. числом, а собственные вектора, отвечающие собственным знач. ортогональны друг другу.

Док-во: Пусть $x \neq 0$ и $Ax = \lambda x$, т.е $\lambda \in \sigma_p(A)$. Тогда $\lambda \|x\|^2 = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) \overset{\text{ОПР}}{=} (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda}\|x\|^2$. Т.к $\|x\| \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ т.е λ - вещ. число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $x \neq 0$ и $Ax = \lambda x$, $y \neq 0$ и $Ay = \mu y$, причём $\lambda \neq \mu$.

умножим на y справа; на x слева

$$\left.\begin{aligned} (Ax, y) &= (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \\ (x, Ay) &= (x, \mu y) = \mu(x, y) \end{aligned}\right\} \text{ вычтем одно из другого}$$

$0 = (\lambda - \mu)(x, y)$ Т.к $\lambda \neq 0 + \mu$, то $(x, y) = 0$. т.е $x \perp y$ ЧТД

Опр Говорят, что подпр. $S \subset H$ явл. инвариантным подпр-вом, если $\forall x \in S$ имеем, что $Ax \in S$

Примеры: 1) H; 2) $\{0\}$; 3) пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$ и $S_\lambda = \{x \in H: Ax = \lambda x\}$. Тогда S_λ - инвар. подпростр-во оператора A

Докажем 3) Пусть $x, y \in S_\lambda$ и α, β - числа. Нужно убедиться, что $\alpha x + \beta y \in S_\lambda$. Имеем $Ax = \lambda x$, $Ay = \lambda y$, $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda x + \beta \cdot \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S_\lambda$.

Напоминание: Если S - подпространство в H, то $S^\perp = \{x \in H: \forall y \in S, (x, y) = 0\}$ - ортогональное дополнение к S

Теорема (об инвариантном подпр-ве самосопр. оператора)
Пусть $A: H \to H$ — самосопряжённый огран. оператор и $S \subset H$ — его инвариантное подпростр. Тогда $S^\perp$ тоже является инвариантным подпростр оператора A в H

Док-во: Если $x \in S^\perp$, то $\forall y \in S$ имеем $(y, Ax) = (\underbrace{Ay}_{\in S}, x) = 0$
Значит, $Ax \in S^\perp$. Следовательно $S^\perp$ - инвариантное подпр-во $S^\perp$ оператора A

7.12 Компактные операторы

(В этом пункте H, H_1, H_2, H_3 - гильбертовы простр-ва
$A: H \to H_1$, $B: H_2 \to H_3$ - лин. огр. операторы)

ОПР Говорят, что оператор $A: H \to H_1$ является компактным, если существует послед-сть $A_1, A_2 \dots A_n \dots$ такая, что
((1)) $\forall n$ $A_n: H \to H_1$ и является огр. линейным оператором
((2)) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$ (такие операторы называем операторами с конечномерным образом)
((3)) $A_n \to A$ при $n \to \infty$

• **Свойства компактных операторов**
1) Если $A: H \to H_1$ компактен и $B: H \to H_1$ компактен, то $\forall \alpha, \beta$ - числа оператор $\alpha A + \beta B$ - компактный
2) Если $A: H \to H_1$ компактен, то A ограничен
3) Если $A: H \to H_1$ ограничен и $\dim H_1 < \infty$, то A компактен
4) Если $\dim H = \infty$, то $I: H \to H$ - тождественный оператор не является компактным
5) Если $A: H \to H_1$ компактен, $B: H_1 \to H_2$ - огран., $C: H_2 \to H_3$ - огран, то операторы $BA: H \to H_2$ - компактен и $AC: H_3 \to H_1$ компактен
6) Если $\dim H = +\infty$, $A: H \to H_1$ - компактный и обратимый, то A^{-1} не может быть ограниченным

Док-во: A - компактный $\Rightarrow \exists A_1, A_2 \dots, A_n \dots$ облад. св-ва ((1)) - ((3))
B - компактен $\Rightarrow \exists B_1, B_2 \dots B_n$ облад. свойствами ((1)) - ((3))

Убедимся, что $\alpha A_1+\beta B_1,\ \alpha A_2+\beta B_2,\ \dots\ \alpha A_n+\beta B_n \dots$ — обладает свойствами ((1))–((3))

((1)) $\forall n$ $\alpha A_n+\beta B_n$ — линейный огран. оператор (уже доказали в п 7.1)

$$\|\alpha A_n+\beta B_n\| \le |\alpha|\cdot\|A_n\| + |\beta|\cdot\|B_n\|$$

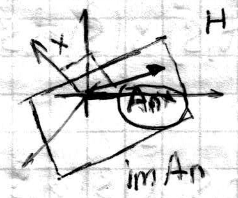
((2)) $\forall n$ $\dim(\mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n)) < +\infty$

$$\mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n) = \{\alpha A_n x + \beta B_n x \mid x\in H\} \subset \{\alpha A_n x \mid x\in H\} + \{\beta B_n y \mid y \in H\} =$$
$$= \mathrm{im}(\alpha A_n) + \mathrm{im}(\beta B_n) \Rightarrow \dim \mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n) \le \dim \mathrm{im} A_n + \dim(\mathrm{im} B_n) < +\infty.$$

((3)) $\alpha A_n+\beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A+\beta B$ — это св-во нам известно как линейность предела сх-ся операторных последовательностей ЧТД

Итог: Свойство 1) доказано прямолинейной проверкой опр-я компактного оператора. Аналогично доказываются свойства 2), 3) и 5), которые мы опустим.

Докажем 4): От противного. Предположим, что $\exists A_1,\dots,A_n\dots$ обладающих свойствами ((1))–((3)) и $A_n \to I$ при $n\to\infty$



Существует $x\in H$, $\|x\|=1$ и $x \perp \mathrm{im} A_n$

Значит $\|x - A_n x\| \ge \|x\| = 1$.

Тогда $\|I-A_n\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1} \|Iy - A_n y\| \ge \|Ix - A_n x\| \ge 1$ — это противоречит $\|I-A_n\| \to 0$ при $n\to\infty$

Докажем 6). От противного. Допустим A^{-1} — огран. Тогда $\underbrace{A}_{\text{комп. по услов.}}\cdot\underbrace{A^{-1}}_{\text{огр. по предп.}} = I \Rightarrow$
$\Rightarrow I$ компактен по 5). А это противоречит св-ву 4)

<u>Теорема</u> (Гильберта–Шмидта) (О существовании базиса из собственных векторов у самосопр. компактного оператора) (без док-ва)

Пусть H — гильбертово простр. $\dim H \ne 0$, $A: H\to H$ — компактный самосопряженный оператор. Тогда в H существует ортонорм. базис из собственных векторов оператора A. т.е. $\exists x_1,\dots x_n\dots$ такие, что $(x_n, x_m) = \delta_{nm}$ — символ Кронекера; $x_1,\dots,x_n$ — базис.

$\forall n$ $Ax_n = \lambda_n x_n$, где λ_n — собственные значения оператора A.

Замечание. В случае когда $\dim H < +\infty$, эта теорема эквивалентна теореме из линейной алгебры о том, что

ВН сущ-ет базис, в котором матрица оператора A становится диагональной.

§8. Интегральные Уравнения

(8.1) Интегральные ур-я Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих

<u>ОПР</u>. Интегральным уравнением наз-ся уравнение, содержащее искомую функцию под знаком $\int$

Замечание: это неудачное определение, также, как неудачно говорить, что дифф. уравнение это ур-е содержащее неизв функцию под знаком производной т.к $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$

$$\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$$ – Ур-е Фредгольма 1ого рода

$$\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$ – Ур-е Фредгольма 2ого рода

$$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$$ – Ур-е Вольтерра 1 рода

$$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$ – Ур-е Вольтерра 2-ого рода

где $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ известные функции а $x:[a,b]\to\mathbb{C}$ – искомая функция. При этом функция K наз-ся ядром интегрального ур-я.

• Замечание 1) В уравнении Фредгольма пределы (a и b) постоянны, а в уравнении Вольтерра верхний предел (t) переменный

2) Уравнения I рода содержат неизвестную функцию (x) только под знаком интеграла, а в уравнении II рода (x) входит еще и вне интеграла

3) Уравнение Вольтерра явл частным случаем уравнения Фредгольма