ВН сущ-ет базис, в котором матрица оператора A становится диагональной.

§8. Интегральные Уравнения

(8.1) Интегральные ур-я Фредгольма и Вольтéрра и примеры задач, к ним приводящих

<u>ОПР</u>. Интегральным уравнением наз-ся уравнение, содержащее искомую функцию под знаком $\int$

Замечание: это неудачное определение, также, как неудачно говорить, что дифф. уравнение это ур-е содержащее неизв функцию под знаком производной т.к $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$

$\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$ - Ур-е Фредгольма 1ого рода

$\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$ - Ур-е Фредгольма 2ого рода

$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$ - Ур-е Вольтерра 1 рода

$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$ - Ур-е Вольтерра 2-ого рода

где $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$, $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ известные функции, а $x: [a,b] \to \mathbb{C}$ - искомая функция. При этом функция K наз-ся ядром интегрального ур-я.

• Замечание 1) В уравнении Фредгольма пределы (a и b) постоянны, а в уравнении Вольтерра верхний предел (t) переменный

2) Уравнения I рода содержат неизвестную функцию (x) только под знаком интеграла, а в уравнении II рода (x) входит еще и вне интеграла

Уравнение Вольтерра явл частным случаем уравнения Фредгольма

В-ка

$$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds = \int_a^b \widetilde{K}(t,s)\,x(s)\,ds, \text{ где } \widetilde{K}(s) = \begin{cases} K(t,s) & \text{если } a \le s \le t \\ 0 & \text{если } t \le s \le b \end{cases}$$

4) В курсе дифф уравнений мы показывали, что начальная задача

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ эквивалентно интегр. уравнению $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

5) Теория интегральных уравнений в целом эквивалентный языку дифф. уравнений, но есть нюансы. Это напоминает мат анализ. теорию сходящихся последовательностей и рядов.

<u>Пример</u>: (сведение начальной задачи для линейного неоднор. дифф. ур-я с переменными коэфф. к интегральному ур-ю)

$$\begin{cases} x^{n}(t) + p_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)\,x(t) = f(t) \\ x^{n-1}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x(a) = 0 \end{cases}$$
$$a \le t \le b$$

Вместо $x(t)$ введём новую неизвестную функцию $y(t)$.

19.05.2021

Лекция 32 (16).

Положим $x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^t y(s)\,(t-s)^{n-1}\,ds$ где $y(s)$ - новая искомая функц

Из мат анализа $\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,s)\,ds = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\,ds + \beta'(t) f(t, \beta(t)) - \alpha'(t) \cdot f(t, \alpha(t))$

$$x'(t) = \frac{n-1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)\,(t-s)^{n-2}\,ds + 1\cdot y(t)\,(t-t)^{n-1} - 0 = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t y(s)\,(t-s)^{n-2}\,ds$$

$$x^{(n-1)}(t) = \frac{1}{0!}\int_a^t y(s)\,ds$$

$$x^{(n)}(t) = y(t)$$

Подставим эти формулы в исходное ур-е

$y(t)+p_1(t)\int_a^t y(s)\,ds+p_2(t)\int_a^t y(s)(t-s)^1 ds+\ldots+p_{n-1}(t)\frac{1}{(n-2)!}\cdot\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}+$

$+p_n(t)\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}ds=f(t)$. т.е $y(t)+\int_a^b K(t,s)y(s)\,ds=f(t)$

ур-е Вольтерра II рода

где $K(t,s)=p_1(t)+p_2(t)\frac{(t-s)^1}{1!}+\ldots+p_{n-1}(t)\frac{1}{(n-2)!}(t-s)^{n-2}+p_n(t)\frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}$.

Замечание: Начальные условия выполняются автомат.

Замечание: В качестве новой неизвестной функции $y(t)$ мы просто ввели $x^{(n)}(t)$

8.2 Интегральный оператор Гильберта-Шмидта

Опр: Пусть $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ — фиксированная функция из пространства $L_2([a,b]\times[a,b])$, т.е такая, что $\|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}=\left\{\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2dt\,ds\right\}^{1/2}<+\infty$. Интегральным оператором Гильберта-Шмидта (ГШ) $A: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ называем оператор, сопоставляющий каждой функции $x\in L_2[a,b]$ новую функцию $Ax\in L_2[a,b]$ по формуле $(Ax)(t)\overset{*}{=}\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$. При этом K наз-ся ядром опер. A

Замечание: Уравн. Фредгольма II рода (т.е $x(t)=\mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds-f(t)$, μ-число!) может быть переписано в виде $x=\mu Ax+f$, где A-оператор ГШ

Теорема: (о компактности оператора ГШ) без док-ва.
Пусть интегр. опер. ГШ задан формулой (*). Тогда A - линейный, компактный и $\|A\|\le\|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}$

Теорема (об операторе, сопряжённому к операт ГШ).
Пусть интегр. оператор ГШ задан формулой (*). Тогда A^* тоже является опер. ГШ, причём его ядро $K^*(t,s)$ можно найти по формуле $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$, где черта означает компл. сопряжение. (также, как в линейной алгебре)

Док-во: Зададим лин. оператор $B: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ по формуле $(By)(t)=\int_a^b\overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds$ для любой $y\in L_2[a,b]$

бедимся, что $\forall x, y \in L_2[a,b]$ справедливо равенство $(Ax, y) = (x, By)$
тсюда будет следовать, что $A^* = B$, т.е $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$.
самом деле: а) $(Ax, y) = \int_a^b (Ax)(t)\,\overline{y(t)}\,dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\right] \overline{y(t)}\,dt$
) $(x, By) = \int_a^b x(t)\,\overline{By(t)}\,dt = \int_a^b x(t) \left[\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds\right] dt =$

$$= \int_a^b x(t) \left[\int_a^b K(s,t)\,\overline{y(s)}\,ds\right] dt.$$

нтегралы а) и б) являются повторными интегралами для двойно-
о интеграла:

$$\int_a^b \int_a^b K(t,s)\,x(t)\,\overline{y(s)}$$ и поэтому а) = в) ЧТД.

3) Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод посл
риближений

$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$ — ур-е Фредгольма II рода => ряд Неймана

$\Rightarrow x = \mu A\cancel{x} + f \Rightarrow (I - \mu A)x = f \Leftrightarrow x = (I - \mu A)^{-1} f \Leftrightarrow$

Т. Неймана: $x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f =$ если $\|A\| < 1$ т.е $|\mu| \cdot \|A\| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ где $x_0 = f$, $x_n = \mu^n A^n f$ т.е $x_n = \mu A x_{n-1}$ ($\forall n \geq 1$)

Метод послед. прибл

4) Интегральные уравн-я с симметр. ядром. Теорема Гильберта-
Шмидта (ГШ) для интегр. уравнений с симм. ядром. Разложение
ешений по собственным функциям ядра

з теоремы о операт, сопряжённому к опер. ГШ следует, что $A = A^*$

$\Rightarrow \overline{K(s,t)} = K(t,s)$
сопр.
симметр. ядро.

Пусть A — оператор Г-Ш. с симметр. ядром. Будем решать интегральное
р-е Фредгольма II рода $x = \mu A x + f$

днородное интегр. ур-е

$x = \mu A x$

Уравнение для собственных функций опер. A

$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$

собст. функция A

собств значение опер A

$\mu = \frac{1}{\lambda}$ характеристические значения A

или характерист. значения ядра K

$x \neq 0$ - собственные функции ур-я $x = \mu A x$

или —״— —״— —״— ядра K

A имеет симм. ядро $\Rightarrow$ все $\mu \in \mathbb{R}$ (хар. значения) $\Leftarrow$ A-самосопряжённый $\Rightarrow$ все $\lambda \in \mathbb{R}$

Теорема (Г-Ш для интегр. уравнений с симм. ядром)

Пусть A - опер. Г-Ш с симметричным ядром. Тогда в $\operatorname{im} A$ существует ортонормированный базис из собственных функций ур-я $x = \mu A x$

$\Leftarrow$

Теорема (о сущ. гильберт. базиса)

Если $\dim H \neq 0$ и A - компакт. самосопр. оператор, то в H сущ. ортонорм. базис из собственных векторов опер A

Док-во Пусть $x_1 \dots x_n$ - ортонорм. базис в $L_2[a,b] = H$, сост из собственных функц. A

Выберу произв. $y \in \operatorname{im} A$, такой, что $\exists z \in H$, $y = Az$. Тогда $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y, x_n) x_n$. Возьмем такое n, что $\lambda_n = 0$, т.е $A x_n = \lambda_n x_n = 0$

Тогда $(y, x_n) = (Az, x_n) = (z, A x_n) = (z, 0) = 0$

Итог: Искомый ортонорм. базис в $\operatorname{im} A$ из собственных функций уравнения $x = A\mu x$ получается из имеющегося у нас ортонормированного базиса из собственных функций оператора A вычёркиванием тех x_n, кот соотв $\lambda_n = 0$ ЧТД

Пусть A-оператор Г-Ш. с симметр. ядром и пусть $x_1 \dots x_n$ - ортонормированный базис в $\operatorname{im} A$ из собств. функций интегрального ур-я $x = \mu A x$.

Будем ~~иметь~~ решать неоднородное ур-е $x = \mu A x + f$ ⊛

$x - f = \mu A x = \sum\limits_n a_n x_n$ - просто ряд с коэффф a_n $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = f + \sum_n a_n x_n$. Подставим в (*)

$$f + \sum_n a_n x_n + \mu A\left(f + \sum a_n x_n\right) + f = \mu\, Af + \mu \sum_n a_n\, A x_n + f$$

$\operatorname{im} A \quad \sum_n b_n x_n$ где $b_n = (Af, x_n) = (f, Ax_n) =$

$$= \left(f, \frac{1}{\mu_n} x_n\right) = \frac{1}{\mu_n}(f, x_n)$$

А теперь $A x_n = \frac{1}{\mu} x_n$.

Т.к. $x_1 \ldots x_n$ - базис, то $\forall n$ коэфф-ты перед x_n должны быть одинаковы слева и справа.

$$a_n = \frac{\mu}{\mu_n}(f, x_n) + \frac{\mu}{\mu_n} \cdot a_n \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) a_n = \frac{\mu}{\mu_n}(f, x_n) \Rightarrow \quad a_n = \boxed{\frac{\mu}{\mu_n - \mu}(f, x_n)}$$

Ответ: $x = f + \mu \sum_n \frac{(f, x_n)}{\mu_n - \mu} x_n$ - разложение решения по собств. функциям ядра.