

Александров

Виктор

Алексеевич

- Стр. 1 1.1 Задана о разложении функций в ряд Фурье
Стр. 2 1.2 Разложение функций с произвольным периодом
Стр. 3 1.3 Разложение только по $\sin$ или только по $\cos$
Стр. 5 1.4 Лемма Римана-Лебега для естественного промежутка
Стр. 6 1.5 Ядро Дирихле
Стр. 8 1.6 Теорема о представимости функции в точке ее ряда Фурье
Стр. 11 1.7 Пример разложения функции в ряд Фурье и вычисление суммы числового ряда.
Стр. 12 1.8 Ряд Фурье в комплексной форме
Стр. 13 1.9 Разложение в комплексной и вещественной ряд Фурье и вычисление интегралов
Стр. 14 1.10 Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье
Стр. 16 1.11 Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами
Стр. 19 1.12 Равномерная сходимость ряда Фурье
Стр. 20 1.13 Явление Гиббса
Стр. 22 1.14 Равенства Лавуаэра
Стр. 24 1.15 Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении триг. и алг. многочленами.

Преобразования Фурье

- Стр. 27 2.1 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье
Стр. 29 2.2 Теоремы о представимости функции в точке ее интегралом Фурье
Стр. 30 2.3 Представление Ф-и на полуоси ее интегралом Фурье
Стр. 30 2.4 Пример представления Ф-и ее интегралом Фурье
Стр. 32 2.5 Интеграл Фурье в комплексной форме
Стр. 34 2.6 Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье
Стр. 35 2.7 Вспомогательные функции
Стр. 39 2.8 Преобразования Фурье б.у. Ф-и
Стр. 44 2.9 Равенство Парсеваля
Стр. 45 2.10 Дополнительные свойства преобразования Фурье

Преобразование Лапласа

- Стр. 47 3.1 Определение и основные свойства преобразования Лапласа
Стр. 51 3.2 Применение преобразования Лапласа для решения О.Д.У.
Стр. 52 3.3 Дополнительные свойства преобразования Лапласа

Обобщенные функции

- Стр. 54 4. Обобщенные функции
Стр. 55 4.1 Пространство основных функций
Стр. 59 4.2 Пространство обобщенных функций. Примеры обобщенных функций
Стр. 62 4.3 Формулы Сохоцкого
Стр. 64 4.4 Сходимость обобщенных функций. Дельта-образная последовательность
Стр. 67 4.5 Замена переменных в обобщенных функциях
Стр. 69 4.6 Умножение обобщенных функций
Стр. 70 4.7 Дифференцирование обобщенных Ф-и. Теорема о связи классической и обобщенной производной
Стр. 73 4.8 Вычисление фундаментального решения трехмерного оператора Лапласа
Стр. 75 4.9 Свертка обобщенных функций
Стр. 77 4.10 Решение Д.У. с помощью фундам. реш. Теорема о фундам. решении О.Д.У.
Стр. 79 4.11 Преобразование Фурье обобщенных функций маленко-го роста

Основы функционального анализа

Лекция 1 07.09.2020

1.1 Задача о разложении функции в ряд Фурье

В мат. анализе изучали функциональные ряды, например $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

Опр Функциональный ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - наз-ся тригонометрическим рядом.

Задача можно ли данную ф-ию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ разложить в триг. ряд, т.е. найти коэф. a_n, b_n такие, что $\forall x \in \mathbb{R}$ имело место равенство:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

Если можно, то как.

Замечания:

1. Если формула (1) - верна, то тогда f - 2π -периодическая ф-ия, т.е.

триг. ряд, стоящий в формуле (1) является 2π -периодической ф-ией.

2. Если формула (1) верна, то её достаточно проверить на любом промежутке длины 2π , например на $[0; 2\pi]$ или $[-\pi; \pi]$ обычно проверяют именно на таком промежутке

• Как искать a_n, b_n ?

Пусть (1) имеет место, причём ряд можно интегрировать почленно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow$$

$\frac{a_0}{2} \cdot 2\pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{0-0}{n} = 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n - (-1)^n}{n} = 0$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

Найдём $a_m, m \geq 1$ ($m=0$ уже рассмотрели)

Умножим (1) на $\cos mx$ и проинтегрируем от $-\pi$ до π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) \, dx \right)}_{\substack{\text{присоединение формул (3) и (4)} \\ \frac{1}{2} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) \quad \frac{1}{2} (\sin((m+n)x) - \sin((m-n)x)) \\ \parallel \\ 0, \text{ т.к. } m+n \neq 0 \quad 0, \text{ т.к. } m-n \neq 0 \\ \begin{cases} 0, \text{ если } n \neq m \\ 2\pi, \text{ если } m=n \end{cases} \\ \parallel \\ 0, \text{ т.к. } m \neq 0 \quad 0, \text{ т.к. } m \neq 0 \quad \parallel \\ 0 \quad 0 \quad \parallel \\ \text{всегда} \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (3) \text{ (НЕ ДОКАЗАНО, НО НАШЛИ)} \\ \text{для } m \geq 1$$

• Аналогично, умножив (1) на $\sin mx$ получим b_m

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad m \geq 1 \\ \text{формула (4)}$$

Опр формулы (2) - (4) наз-ся формулами Фурье - Фурье

• Если дана 2π -периодическая ф-ия $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то по ней можно найти числа a_n и b_n по формулам (3) - (4), а затем построить тригонометрический ряд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Такой ряд наз-ся формальным рядом Фурье ф-ии f (пока не изучена сходимость)

Если потом окажется, что формальный ряд Фурье сх-ся и его сумма равняется $f(x)$, то пишут, что $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ и называют этот ряд, рядом Фурье ф-ии f .

1.2 Разложение ф-ии с произвольным периодом

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - $2L$ -периодическая, где $L > 0$

Делаем линейную замену переменных $x = \frac{Ly}{\pi}$, $y \in \mathbb{R}$

Построим новую ф-ию:

$$g(y) = f(x) = f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny), \text{ где } a_n, b_n - \text{находятся по ф-ам (3) и (4) из 1.1}$$

Функция g - является 2π -периодической, т.к. $g(y+2\pi) = f\left(\frac{L(y+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{Ly}{\pi} + 2L\right) =$

$$= f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) = g(y)$$

②

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \, dy \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny \, dy$$

Вернёмся к переменным x :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{l} \right) \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

Появился от перехода от dy к dx

Аналогично для b_n

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

1.3 РАЗЛОЖЕНИЕ ТОЛЬКО ПО $\sin$ ИЛИ ТОЛЬКО ПО $\cos$

I ШАГ.

Пусть f - ЧЕТНАЯ Ф-ЦИЯ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда $\forall a > 0 \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$

Докажем равенство:

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx \quad \text{ЗАМЕНА } x = -x \text{ В 1-ом ИНТЕГРАЛЕ:}$$

$$-\int_a^0 f(-x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$$

ЧЕТНАЯ ($f(-x) = f(x)$)

Аналогично для НЕЧЕТНОЙ f - ИМЕЕМ

$$\forall a > 0 \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

II ШАГ

Пусть f - 2π ПЕРИОДИЧЕСКАЯ Ф-ЦИЯ, и к тому же ЧЕТНАЯ

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \stackrel{\text{I ШАГ}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ЧЕТ · ЧЕТ = ЧЕТ
ЧЕТ · НЕЧЕТ = НЕЧЕТ

Аналогично, если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - нечет, 2π -периодична, то

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \stackrel{\text{I шаг}}{=} 0$$

-нечет · чет = нечет

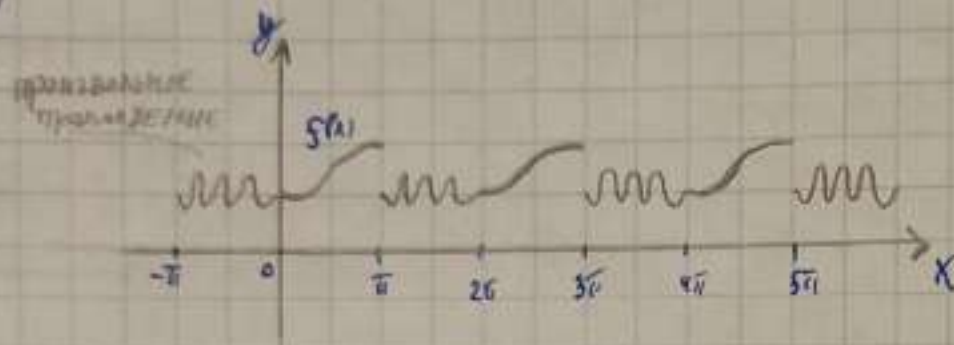
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \stackrel{\text{II шаг}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

-нечет · нечет = чет

$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

III шаг

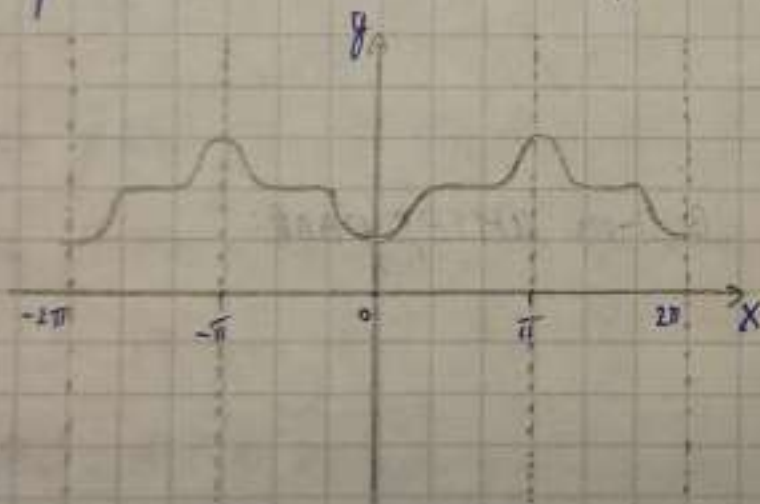
Пусть $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$



Бесконечно много способов продолжения $f(x)$

Из этих многих способов продолжения гр-ли f до 2π -периода, выделится два, приводящие к наиболее короткому ответу

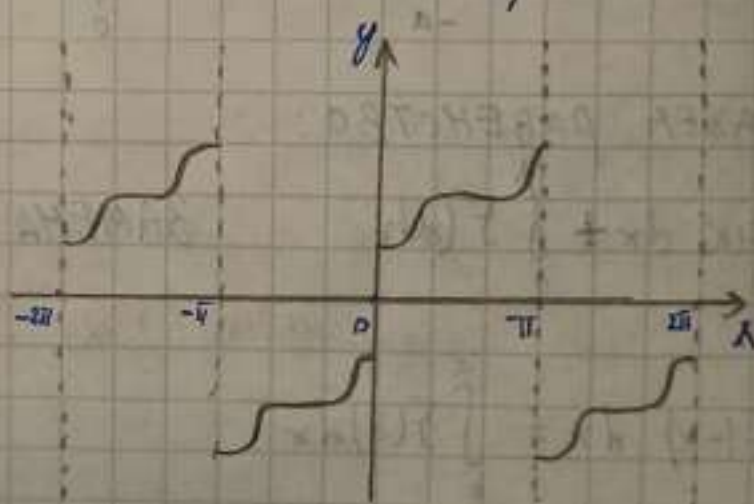
• Продолжаем четным образом



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

• Продолжаем нечетным образом



$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

1.4 ЛЕММА РИМАНА-ЛЕБЕГА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА

Опр. Ф-ия $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся интегрируемой по промежутку $(a, b) \subset \mathbb{R}$, если $\int_a^b f(x) dx$ - сущ. и конечен. И наз-ся абсолютно интегрируемой по промежутку (a, b) , если $\int_a^b |f(x)| dx$ - сущ. и конечен.

ЛЕММА РИМАНА-ЛЕБЕГА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и является абсолютно интегрируемой.

Тогда $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = 0$

Замечания:

1) Почему 2 человека указаны как авторы?

Это две разные леммы (для инт. Римана и инт. Лебега)

2) Интеграл $\int_a^b f(x) \cos px dx$ - с.х.-с.х., т.к.

$$\left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| \leq \int_a^b |f(x) \cos px| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx < +\infty$$

Док-во

Сначала рассмотрим случай, когда Ф-ия f - непрерывно диф-ма:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| &= \left| \int_a^b f(x) d(\sin px) \right| \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left| \left(f(x) \sin px \right) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) \sin px dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{p} (|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx) = \frac{\text{const}}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

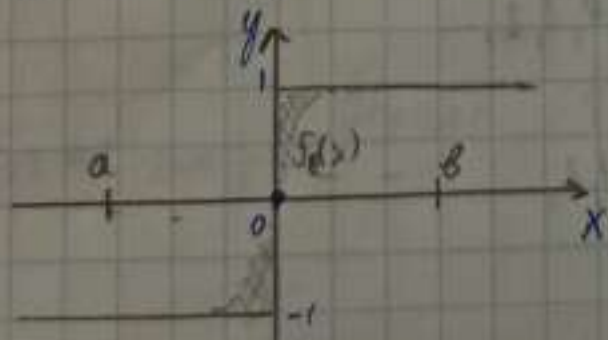
ЛЕКЦИЯ 2 14.09.2020

Док-во (продолжение)

Если f - произвольная Абс. инт. Ф-ия. Тогда будем использовать утв:

Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - Абс. инт., то $\forall \varepsilon > 0 \exists f_\varepsilon: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. диф-ма

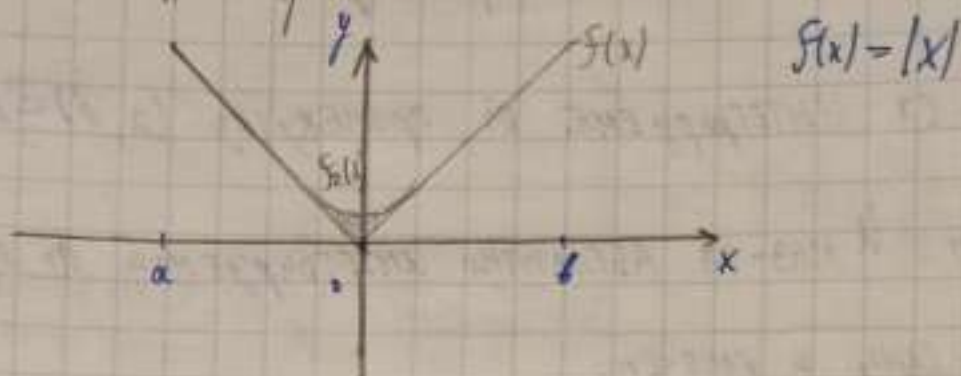
$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$$



$$f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$a < 0, b > 0$$

Можно приближать $f(x)$ к $f(x)$



Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем δ как в утв. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) \cos px \, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \cos px \, dx + \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| \, dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px \, dx \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{ч.т.д.}$$

$\downarrow$
0 при $p \rightarrow +\infty$ (Лемма)

Замечание

В усл. Леммы Р-Л справедливы следующие формулы

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \cos px \, dx = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx = 0$$

$$e^{id} = \cos d + i \sin d, \quad d \in \mathbb{R} \quad \text{— формула Эйлера}$$

1.5 Ядро Дирихле

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодич. и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < +\infty$

Построим по формулам Эйлера-Фурье коэф. Фурье f -и f :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad n = 1, 2, \dots$$

формальный ряд Фурье $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Наш главный вопрос: сходится ли этот ряд, и равна ли его сумма числу $f(x)$?

Обозначение: $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$

Преобразуем вопрос:

$$S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} f(x)$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \Leftrightarrow \text{Вспомогательная}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n (\cos mt \cdot \cos mx + \sin mt \cdot \sin mx) \right] dt \Leftrightarrow$$

$$\cos m(t-x) = \cos m\alpha, \quad \alpha = t-x$$

Найдём сумму

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m\alpha$$

Будем использовать Триг. ор-лы

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Из неё следует:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{3}{2}\alpha - \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{5}{2}\alpha - \sin \frac{3}{2}\alpha = \cos 2\alpha \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\dots$$

$$\sin \frac{2n+1}{2}\alpha - \sin \frac{2n-1}{2}\alpha = \cos n\alpha \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Складываем, получаем

$$\sin \frac{2n+1}{2}\alpha = \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha + \dots + \cos n\alpha \right) \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Значит $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m\alpha = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \quad \text{— Интеграл Дирихле}$$

Сделаем замену

$$t-x = z$$

под интегралом стоит 2π -периодич. ф-ция

инт-ла все равно получим

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz = \quad \text{т.к. под интегралом стоит } 2\pi\text{-периодич. ф-ция}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) D_n(z) dz, \quad \text{где } D_n(z) \stackrel{\text{обозн.}}{=} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} \text{ — Ядро Дирихле}$$

Св-ва ядра Дирихле

- 1) D_n — четная ф-ция, т.е. $D_n(-z) = D_n(z)$, $\forall z$
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$, $\forall n$. Это следует из ф-лы $D_n(z) = \left(\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^n \cos m z \right) \frac{1}{\pi}$

$$\text{того, что } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 2\pi, & m = 0 \end{cases}$$

1.6. ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВИМОСТИ Ф-ЦИИ В ТОЧКЕ ЕЕ РЯДОМ ФУРЬЕ

Опр 2π -периодическая ф-ция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся кусочно гладкой, если на $[-\pi; \pi]$ $\exists$ конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$, таких, что

- 1) на каждом открытом интервале (x_i, x_{i+1}) ф-ция f — непрерывна и дифференцируема
- 2) $\forall i$ существуют конечные пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0+} f(x_i + h) \stackrel{\text{обозн.}}{=} f(x_i + 0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} f(x_i - h) \stackrel{\text{обозн.}}{=} f(x_i - 0)$$

При этом $f(x_i + 0)$ — называют пределом ф-ции f в т. x_i справа

и $f(x_i - 0)$ — пределом ф-ции f в т. x_i слева

3) Случ. и конечны пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_i - h) - f(x_i + 0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_i - h) - f(x_i - 0)}{-h}$$

Замечание.

Заметим, что два последних предела очень похожи на односторонние производные ф-ии f в т. x_i , которые как известно, задаются ур-нями:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_i - h) - f(x_i)}{-h}$$

ТЕОРЕМА (о представимости ф-ии в точке её рядом Фурье)

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π периодическая ф-ия абс. конт. на промежутке $[-\pi; \pi]$. Тогда ряд Фурье ф-ии f сх-ся $\forall x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна числу $f(x)$, если x — точка непрерывности ф-ии f и равна $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, если x — точка разрыва ф-ии f

Доказ-во

Т.к. в точке непрерывности $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, поэтому достаточно проверить, что

$$S_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \quad \forall x$$

$$\text{т.е. нужно док-ть, что } S_n(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Преобразуем это выражение:

умножаем на $1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \right) D_n(z) dz =$$

$$= \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$$

ЗАМЕНА: $z \rightarrow -z$

$$\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} = + \int_{\pi}^0 \left(f(x-z) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \right) D_n(z) dz + \int_0^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \right) D_n(z) dz =$$

$$= \int_0^{\pi} (f(x+z) + f(x-z) - f(x+0) - f(x-0)) D_n(z) dz =$$

$$= \int_0^{\pi} (f(x+z) - f(x+0)) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz + \int_0^{\pi} (f(x-z) - f(x-0)) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz$$

АБСОЛЮТНО ИНТ. НА $[0; \pi]$? Если да, то по лемме Р.Л. оба инт. $\rightarrow 0$

Т.к. f - кусочно-гладкая, то ф-ия $\circledast$ может не быть абс. инт. только из-за того, что интеграл от ее модуля расходится в 0.

Поедем на z и умножим на z : $\int_0^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \frac{\sin \frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz$

Но из-за (3) в усл. глад-ти ф-ии $\circledast$ ограничена в окрестности т. 0 и поэтому абс. интегрируема.

Значит, по лемме Р.-Л. каждый из последних инт. стремится к 0, т.е. $S_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ Ч.Т.Д.

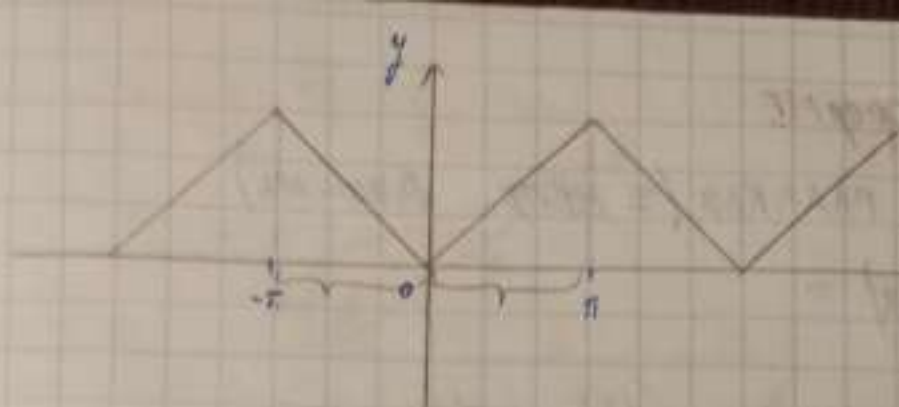
ЗАМЕЧАНИЯ

Известны и другие условия, гарантирующие возможность представить ф-ию по ее ряду Фурье. Но только непрерывности ф-ии не достаточно

Примеры кусочно-гладких ф-ий



2)



$$x_0 = -\pi$$

$$K_1 = 0$$

$$x_L = \pi$$

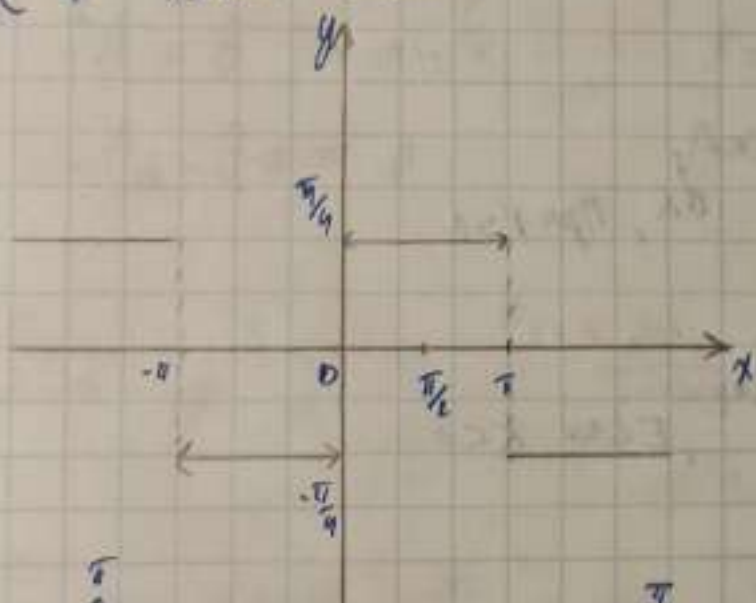
ЛЕКЦИЯ 3 21.09.2020

1.7 Пример разложения ср-чи в ряд Фурье и вычисления суммы числового ряда, А.

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{если } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{если } x = 0, \pi \\ -\pi/4 & \text{если } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

и f - является 2π -период.

$$f \text{ - нечет. } a_n = 0, a_0 = 0$$



$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{-1}{2} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если } n=2k \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n=2k+1 \end{cases}$$

$$\text{Значит } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)}$$

=, т.к. f - кусочно-гладкая, это равенство справедливо $\forall x$

Положим $x = \pi/2$, тогда

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{ряд Лейбница}$$

1.8 Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая гладкая ($\equiv$ непр. диф-ма)

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$

$$\underbrace{\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}}_{\text{Формулы Эйлера}} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{-ie^{inx} + ie^{-inx}}{2}$$

Формулы Эйлера

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \text{ где } c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{если } k=0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2}, & \text{если } k>0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & \text{если } k<0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, & \text{при } k=0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, & \text{при } k>0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(-kx) + i \sin(-kx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, & \text{если } k<0 \end{cases}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ

$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ikx}$ — наз-ся разложением в ряд Фурье в комплексной форме

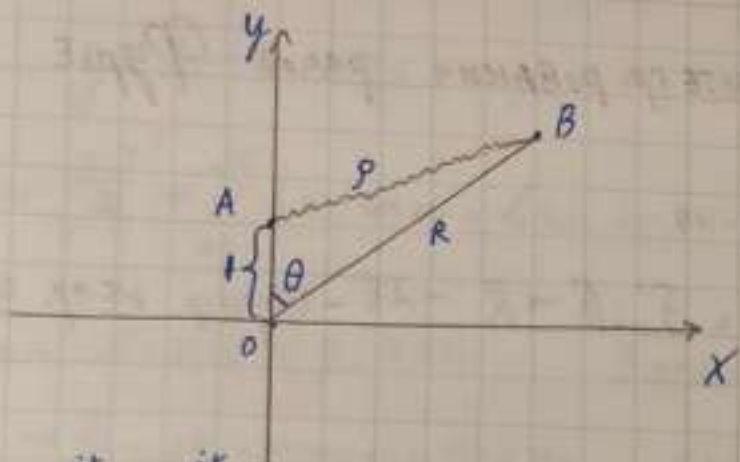
и коэф. c_k заданы ор-ой

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \forall k$$

1.9 РАЗЛОЖЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ И ВЕЩЕСТВЕННЫЙ РЯД ФУРЬЕ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ.

Пусть $f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a \cos x + a^2}$, где $|a| < 1$

Откуда берётся такой знаменатель?



По Теореме Косинусов $\Rightarrow$

$$p^2 = 1 - 2R \cos \theta + R^2 \Leftrightarrow$$

$$R > 1; \quad a = \frac{1}{R}$$

$$\Leftrightarrow R^2 (a^2 - 2a \cos \theta + 1)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \langle z = e^{ix} \rangle_{|z|=1} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-a(z + \frac{1}{z}) + a^2} \stackrel{|z|=1}{=} \frac{(1-a^2)z}{-az^2 + (1+a^2)z - a} \stackrel{1/a}{=} \frac{(a + 1/a)z}{z^2 - (a + 1/a)z + 1} = \frac{(a - 1/a)z}{(z-a)(z-1/a)} =$$

$$= \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-1/a} = \frac{A(z-1/a) + B(z-a)}{(z-a)(z-1/a)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} z: & \quad A + B = a - 1/a \\ \therefore & \quad -A/a - B \cdot a = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= a \\ B &= -1/a \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{z-a} - \frac{1/a}{z-1/a} = \frac{a}{z} \cdot \frac{1}{1-a/z} + \frac{1}{1-az} \stackrel{|a/z|=|a|<1}{=} \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} e^{-i(n+1)x} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где}$$

$$c_k = \begin{cases} a^k, & \text{если } k \geq 0 \text{ (при этом } n=k) \\ a^{-k}, & \text{если } k \leq -1 \text{ (при этом } n+1=-k) \end{cases} \quad \text{или } c_k = a^{|k|} \quad \forall k$$

Значит, $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|} e^{ikx} \Leftrightarrow$ ряд Фурье в комплексной форме

$$\Leftrightarrow 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos kx \quad - \text{ ряд Фурье в вещественной форме}$$

1.10 Теорема о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -период, гладкая ϕ -ф-ия

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ и $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -период. непер. ϕ -ия

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$$

относится к $f'(x)$ (НЕ диф-ия!)

Теорема (о почленном диф-ии ряда Фурье)

с учётом сделанных обознач. имеем:

$$a'_0 = 0 \quad a'_n = nb_n; \quad b'_n = -na_n \quad \forall n$$

Док-во

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) = n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin nx f(x) \, dx = nb_n$$

(по частям)

ф-лы Эйлера-Фурье

Ч.Т.Д.

Замечание

Чем объясняется название этой теоремы?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) = ?$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx)$$

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$$

Вывод.

Настоящий ряд Фурье можно диф-ть почленно, но при этом получится формальный ряд Фурье

Если $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - 2\pi$ -периодическая и непрерывная и $\int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx = 0$, тогда

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Построим $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. Тогда

$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - 2\pi$ -периодическая, гладкая

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

ТЕОРЕМА (о почленном интегрировании ряда Фурье)

При сделанных выше допущениях и обозначениях справедливы равенства

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}; \quad A_n = -\frac{b_n}{n}; \quad B_n = \frac{a_n}{n}$$

Доказ-во

Т.к. $G'(x) = g(x)$, то ф-лы 0 и □ следуют из предыдущей теоремы.

$$G(0) = 0$$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Почему у этой теоремы такое название?

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt \right) =$$

$$\frac{\sin nt}{n} \Big|_{t=0}^{t=x} \quad \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin nx}{n} - b_n \frac{\cos nx - 1}{n} \right)$$

ЛЕКЦИЯ 4 . 28.09.2020

$\frac{A_0}{2}$

$$A_n = -\frac{b_n}{n}$$

$$B_n = \frac{a_n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right)$$

1.11 ЗАДАЧА О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Опр Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выражение

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \quad \text{— НАЗ-ся ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ}$$

МНОГОЧЛЕНОМ СТЕПЕНИ n . Числа α_m, β_m НАЗ-ся КОЭФ. МНОГ-НА $T_n(x)$

ЗАДАЧА (О ПОИСКЕ ПРИБЛ. ТРИГОМЕТ. МНОГОЧЛЕНОМ)

Пусть дана 2π -период. ор-ия $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти Тригон.м. многочлен $T_n(x)$ степени n , наилучшим образом приближающий f .

Уточняющий Вопрос: Что значит наилучшим образом

Возможные ответы:

1) $\sup |f(x) - T_n(x)| \rightarrow \min_{x \in [-\pi; \pi]}$ Это минимизация f суп. Норме, или в равномерной норме или в Чебышевской норме

2) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)| dx \rightarrow \min$ Это минимизация в среднем

3) $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx} \rightarrow \min$ Это минимизация в среднем — квадратичном

Уточняющая задача:

Пусть даны: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодич. и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ и дано $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти тригон.м. многочлен степени n : для приближения $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ такое, что

Тригоном. многочлен $R_n(x)$ степени n выполнялось нерав-во

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R_n(x)|^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx$$

Такой многочлен T_n будет наз-ся многочленом Поля приближений.
Решение этой задачи даётся след. теоремой.

ТЕОРЕМА (о наилучш. прибл. триг. мн-ом):

При сделанных предположениях (т.е. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π период. ф-ция: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty$ и $n \in \mathbb{N}$) следующие два условия эквивалентны:

1) T_n - многочлен Поля приближений

2) $T_n(x) = S_n(x)$, где $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ - положит. отрезок р. ф. ф-ции f , т.е.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Замечание

НЕ СОВПАДАЮТ

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty\} \neq \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

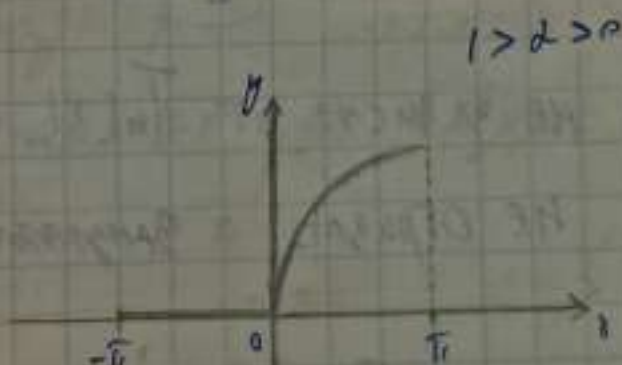
$$\textcircled{=} \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \text{ имеет } 2|uv| \leq u^2 + v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2uv \leq u^2 + v^2 \\ -2uv \leq u^2 + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)^2 \geq 0 \\ (u+v)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Положим $u = f(x)$, $v = 1 \Rightarrow 2|f(x)| \leq |f(x)|^2 + 1 \Rightarrow$ Принтегрируем

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \cdot 2\pi < +\infty$$

$\textcircled{\neq}$

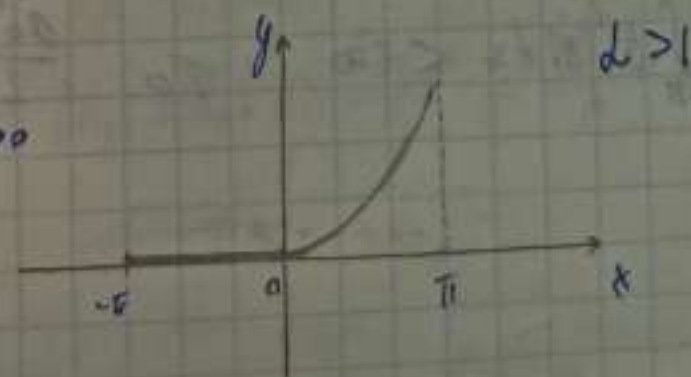
$$f(x) = \begin{cases} x^{\lambda}; & \text{если } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{если } -\pi < x < 0 \end{cases}$$



Для такой ф-ции $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} x^{\lambda} dx =$

$$= \begin{cases} \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \Big|_0^{\pi}, & \text{если } \lambda+1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_0^{\pi}, & \text{если } \lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1 \end{cases}$$

расх-ся



$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} x^{2\lambda} dx = \begin{cases} \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \Big|_0^{\pi}, & \text{если } 2\lambda+1 \neq 0 - \text{СХ} - \text{СЯ} \Leftrightarrow 2\lambda+1 > 0 \\ \ln x \Big|_0^{\pi}, & \text{если } 2\lambda+1 = 0 - \text{РАСХ} - \text{СЯ} \end{cases}$$

ЛЕВОЕ МН-ВО

ПРАВОЕ МН-ВО



НЕ СОВПАДАЮТ

ДОК-ВО

$$|f(x) - T_n(x)|^2 = \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \right|^2 = |f(x)|^2 - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 \cos^2 mx + b_m^2 \sin^2 mx) -$$

$$- 2 \sum_{m=1}^n a_m f(x) \cos mx - b_m f(x) \sin mx + \sigma_n(x), \text{ где } \sigma_n(x) - \text{мн. Котельникова с } \sigma = \frac{1}{n}$$

Видно, что $\cos^2(mx)$, $\sin^2(mx)$ ($m \geq 1$), $\cos kx$ ($k \neq m$), $\cos mx \sin kx$, $\sin mx \sin kx$ ($k \neq m$), $\cos kx \cos kx$ ($k \neq n$)

Из (1.1) $\Rightarrow$ интеграл от каждой из этих с-ми по $[-\pi, \pi]$ равен 0. Значит

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \pi \cdot \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{m=1}^n (a_m^2 - b_m^2) - \pi a_0 a_n - 2\pi \sum_{m=1}^n (a_m a_n + b_m b_n) =$$

ВЫВЕДЕМ ПРАВИЛО
КОЭФФИЦИЕНТОВ

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{\pi}{2} (a_0^2 - 2a_0 a_n + a_n^2) - \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{m=1}^n ((a_m^2 - 2a_m a_n + a_n^2) - a_n^2 +$$

$$+ (b_m^2 - 2b_m b_n + b_n^2) - b_n^2) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{\pi}{2} (a_0^2 - a_n^2) - \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{m=1}^n ((a_m^2 - a_n^2) + (b_m^2 - b_n^2)) - \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \quad (*)$$

СЛАГ. НЕ ЗАВИСИТ ОТ $T_n(x)$.

СЛАГ. НЕ ОТРИЦАТ. и Замечается при $T_n(x) = S_n(x)$

ДОКАЗАНО

ТЕОРЕМА (МЕР-ВО БЕССЕЛЯ)

Если $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$ то $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

Доказано

Повторим из (*) $S_n(x)$ вместо $T_n(x)$:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \Rightarrow$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad \forall n$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$ $\forall n$ получим

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Ч.т.д.

1.12 Равномерная с.с.т. рядов Фурье

Напоминание: Поверят, что функ. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - с.с.т. равномерно на $[a, b]$ и ф-ии $u(x)$, если

$$\sup_{x \in [a, b]} |u(x) - \sum_{m=1}^n u_m(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ТЕОРЕМА (Вейерштрасса о равн. с.с.т. рядов)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, при чем $\forall n \quad \forall x \in [a, b]$ выполн. нер-во $|u_n(x)| \leq C_n$

причем $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ - с.с.т.

Тогда функ. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с.с.т. равномерно на $[a, b]$

концы, напоминания

ТЕОРЕМА (о равномерной с.с.т. рядов Фурье):

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -период. гладкой ф-ии. Ее ряд Фурье с.с.т. к f равномерно на $\mathbb{R}$

Доказано

Пусть $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Тогда $|u_n(x)| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \leq$

т.к. $\cos nx \leq 1$
 $\sin nx \leq 1$

$$u^2 \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

Т-ме о д.к.ф

ряд Фурье $a_n = nb_n$
 $b_n = -a_n$

$$\textcircled{5} \quad \frac{1}{2} (|b_n'|^2 + \frac{1}{n^2}) + \frac{1}{2} (|a_n'|^2 + \frac{1}{n^2}) = C_n \quad \text{ОБОЗН.}$$

ЛЕКЦИЯ 5 5.10.2020

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n'|^2 + |b_n'|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{НЕР-ВО БЕССЕЛЯ}$$

- ЗНАЧИТ ПО Т. ВЕЙЕРШТРАССА

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) - \text{СХ-СЯ РАВНОМЕРНО.}$$

1.13 ЯВЛЕНИЕ ГИББСА

КАКОВЫ ОСОБЕННОСТИ СХ-ТИ РЯДА ФУРЬЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ РАЗРЫВА?

Пусть



Амплитудал примерно на 18% больше

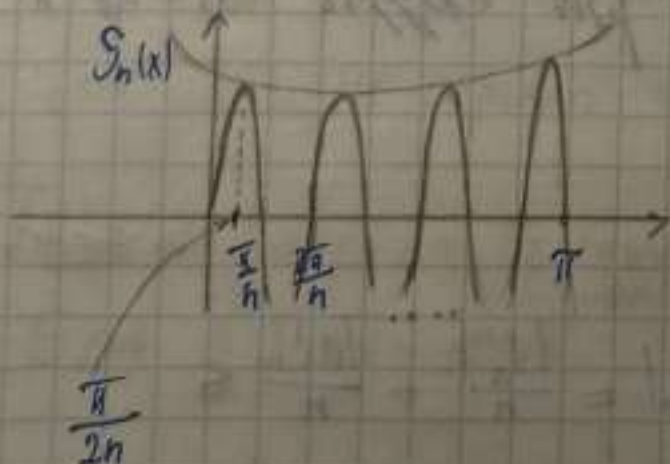
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{если } x = 0, \pi \\ -1, & \text{если } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Из пункта 1.7: ПРИМЕР РАЗЛОЖЕНИЯ Ф-И В РЯД ФУРЬЕ $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

Обозначим $S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}$

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ УПРАЖНЕНИЕ $\Rightarrow$



$$\max_{x \in [0, \pi]} S_n(x) = S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2n}}{(2m+1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2n}$$

сумма Римана для интеграла $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

из МАТЕМАТИКИ: $S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ наз-ся интегральным синусом - НЕ выражается в элементарных функциях. Но её численные значения хорошо известны. В частности из таблиц мы знаем, что $\max_{x \in [0, \pi]} S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} S_i(\pi) \approx 1,1789...$

год начала
французской
революции

- Значит амплитуда част. сумм ряда Фурье при $n \rightarrow \infty$ ма $\approx 18\%$ превосходит амплитуду ф-ии $f(x)$. Это и есть явление Гиббса.

Опр Говорят, что у ф-ии f в точке x_0 наблюдается явление Гиббса, если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0+0} S_n(x)$ и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n(x) < \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) < \lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n(x)$$

Замечание:

- 1) у непрерывных ф-ий явление Гиббса нет.
- 2) В любой точке разрыва кусочно-гладкой ф-ии явление Гиббса есть, причём стемн же $\approx 18\%$
- 3) Подобного рода явления, когда возникает систематическая ошибка при попытках судить о максимумах ф-ии по максимумам приближающих её частичных сумм, имеют место не только в рядах Фурье, но и в других задачах.

1.14. Равенство Ляпунова.

ТЕОРЕМА (равенство Ляпунова)

Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$. Тогда

ряд $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ — с.х. и имеет место равенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Доказ-во

I шаг. Пусть f — непрерывная ф-ия

Из пункта 1.11 «Задача о наилучшем приближении» $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \pi \sum_{n=1}^n (a_n^2 + b_n^2), \text{ где } S_n(x) \text{ — частичная}$$

сумма ряда Фурье ф-ии f . Перейдем к пределу $n \rightarrow \infty$

$$S_n \Rightarrow f; \quad |S_n(x) - f(x)|^2 \Rightarrow 0$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

II шаг. Общий случай

Нужно приближать f — непрерывными функциями.

ТЕОРЕМА (обобщение равенства Ляпунова)

Пусть $f, g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$$

$$\text{и } \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) dx < +\infty$$

и пусть a_n, b_n — коэф. Фурье ф-ии f ;

α_n, β_n — коэф. Фурье ф-ии g .

Тогда $\frac{a_0 + a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n + b_n b_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$

Аналог-во

Коеф. Фурье ф-ии $f+g$ равны $a_n + a_n, b_n + b_n$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + g(x)) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = a_n + a_n$$

$$\frac{(a_0 + a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + a_n)^2 + (b_n + b_n)^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^2 dx$$

Отнимаем из этого равенства,

$$\frac{(a_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - a_n)^2 + (b_n - b_n)^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx$$

это равенство:

воспользуемся тождеством $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$

$$4 \frac{a_0 \cdot a_0}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n + b_n b_n) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

ТЕОРЕМА (равенство Парсеваля в комплексной форме)

Пусть $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ и

c_n - коэф. Фурье ф-ии f , т.е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \text{ тогда}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Аналог-во

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - i b_n}{2} & , \text{ если } n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & , \text{ если } n = 0 \\ \frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2} & , \text{ если } n < 0 \end{cases}$$

Шаг I. Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n} = \begin{cases} \frac{a_n - i b_n}{2} \cdot \frac{a_n + i b_n}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} & , \text{ если } n > 0 \\ \frac{a_0}{2} \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0^2}{4} & , \text{ если } n = 0 \\ \frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2} \cdot \frac{a_{-n} - i b_{-n}}{2} = \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4} & , \text{ если } n < 0 \end{cases}$$

МЕТЕМ - И НА И

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4} \right) + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \stackrel{\text{ТЕОРЕМА ЛАПЛУНОВА}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx$$

Шаг II Пусть $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$

Представим $f(x) = f'(x) + i f''(x)$, где $f'(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f''(x) = \operatorname{Im} f(x)$

Пусть c_n' и c_n'' - коэф. Фурье в компл. ормте ор-ции f' и f''

Тогда $c_n = c_n' + i c_n''$, $|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n} = (c_n' + i c_n'')(c_n' - i c_n'') = |c_n'|^2 + |c_n''|^2$

$$|f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)} = (f' + i f'')(f' - i f'') = |f'|^2 + |f''|^2 \quad (*)$$

Значит $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n'|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n''|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$

по I шагу

1.15. ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ.

ТЕОРЕМА (ВЕЙЕРШТРАССА О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПР. Ф-ЦИИ ТРИГОН. МНОГОЧЛЕНАМИ)

Пусть $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ - НЕПРЕРЫВНА и $f(-\pi) = f(\pi)$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Тригоном. многочлен

$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ такой, что $\forall x \in [-\pi; \pi]$ справедливо

НЕР-ВО $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$

ДОК-ВО

Пусть $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π период. и $\forall x \in [-\pi; \pi]$ $f(x) = F(x)$

Т.к. f - НЕПР. и $f(-\pi) = f(\pi)$, то F - НЕПР Ф-ЦИЯ

ОТКРЫТЫЕ $\delta > 0$ и по построенной Ф-ции $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

продолжим $f(x)$ - это периодическая и получим $F(x)$

$$F_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt - \text{УРЕАЖЕНИЕ ПО СТЕКЛОВУ}$$

ЛЕКЦИЯ 6. 12.10.2020

СВ-ВА Ф-ИИ $F_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1) $F_h - 2\pi$ -ПЕРИОД.

$$F_h(x+2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(t) dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s+2\pi) ds = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s) ds = F_h(x)$$

$s = t - 2\pi$ - ЗАМЕНА, ЕСЛИ $s = x$, ТО $t = s + 2\pi = x + 2\pi$

2) F_h - НЕПРЕРЫВНО-ДИФ-МА
ИЗ МАТ. АНАЛИЗА

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{dg}{dy}(x, y) dx + \frac{d\beta}{dy}(y) g(\beta(y), y) - \frac{d\alpha}{dy}(y) g(\alpha(y), y)$$

ЗНАЧИТ

$$\frac{d}{dx} F_h(x) = \frac{d}{dx} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \cdot \frac{1}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

НАЛИЧИ НЕПРЕРЫВНОСТИ Ф-ИИ

3) ИЗ МАТ. АНАЛИЗА: ТЕОРЕМА КАНТОРА:

"ВСЯКА НЕПРЕРЫВНАЯ НА $[a, b]$ Ф-ИЯ G РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНА НА НЕЁ",
Т.Е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: ЕСЛИ $|x - y| < \delta$ И $x, y \in [a, b]$, ТО $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$

4) $F_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} F$ НА $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ НА $[-\pi; \pi]$

$$|F_h(x) - F(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x) dt \right| = \frac{1}{2h} \left| \int_{x-h}^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \quad (*)$$

$$(*) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \stackrel{(3)}{\leq} \varepsilon \frac{1}{2h} \cdot 2h \leq \varepsilon$$

$|t - x| \leq h < \delta$

Окончательно:

f - 2π -периодическая, непр. диф-ая ф-ция,
значит её ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ с x как f - равномерно, т.е.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall 0 < h \leq \delta$

$|f_h(x) - S_n^h(x)| < \varepsilon$ выполняется $\forall x \in [-\pi, \pi]$, где $S_n^h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^h \cos mx + b_m^h \sin mx)$

Значит, положив $T_n(x) = S_n^h(x)$ будем иметь $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|f(x) - T_n(x)| = |f(x) - S_n^h(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_h(x)|}_{\leq \varepsilon \forall h \leq \delta} + \underbrace{|f_h(x) - S_n^h(x)|}_{\leq \varepsilon \forall h \leq \delta} \leq 2\varepsilon \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА (о равномерном приближении алгебр. многочленами)

Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. ф-ция,

то $\forall \varepsilon > 0 \exists P_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m$ - алгебр. многочлен степени n такой, что
 $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$

Док-во

Шаг Достаточно док-ть теорему в случае $[a, b] = [0, \pi]$

Допустим, что $\forall f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \exists P_n$ -алг. многочлен: $|f(y) - P_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, \pi]$

Для данной ф-ции $f(x)$ сделаем замену $x = \alpha y + \beta$, так, чтобы
 x менялся в $[a, b]$, когда $y \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta = a \\ \alpha \cdot \pi + \beta = b \end{cases} \Rightarrow \alpha \pi = b - a \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b-a}{\pi} \\ \beta = a \end{cases}$$

Положим $g(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha y + \beta) = f(x)$

По предпол. $\forall \varepsilon > 0 \exists P_n$ -алг. многочлен, такой, что

$$|g(y) - P_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, \pi]$$

В этом нер-ве перейдем от y к x :

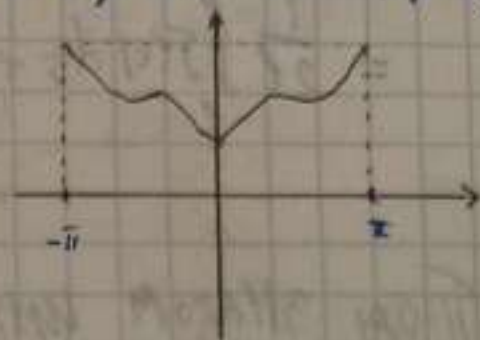
$$|f(x) - P_n(\frac{x-\pi}{2})| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, c]$$

АЛГ. МН-Н
ОТ X

II шаг Пусть $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ - метр. Продолжим ее четным образом на $[-\pi, \pi]$,

т.е. $F(x) = f(|x|), x \in [-\pi, \pi]$, тогда

F - метр. и $F(-\pi) = F(\pi)$



По предыдущей теореме $\forall \varepsilon > 0 \exists T_n(x)$ - триг. мн-н:

$$|F(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Из мат. анализа $\Rightarrow$ ряд Тейлора для ф-ий $\begin{cases} \cos x \\ \sin x \end{cases}$ сходятся к этим ф-ам равномерно на любом конечном интервале $[-R, R]$ (нам нужен интервал $[-\pi, \pi]$)

Будем заменять в триг.-ом мн-ме $T_n(x)$ все синусы и косинусы начальными отрезками их рядов Тейлора до степени N . Результат обозначим $T_n^N(x)$

Из мат. анализа $\Rightarrow T_n^N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} T_n(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0: \forall N \geq N_0 |T_n(x) - T_n^N(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$

Добавляем и вычитаем $T_n(x)$

Значит $|f(x) - T_n^N(x)| \leq \underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|T_n(x) - T_n^N(x)|}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in [0, \pi]$

АЛГ. МН-Н = $P_n(x)$

Ч.Т.Д.

§2. Преобразования Фурье

2.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - абс. инт., метр. ф-ция и пусть $l > 0$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \quad \text{где} \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt$$

натуральная ф-ла

(равенство только на $[-l, l]$)

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt$$

Перейдем к пределу при $l \rightarrow \infty$, причем не будем строго обосновывать законность своих действий:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\frac{n\pi t}{l} dt \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \right) =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \underbrace{\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)}_{\cos\left(\frac{n\pi}{l}(t-x)\right)} dt$$

Под знаком интеграла получим:

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{l}(t-x) \text{, обозн. } y_n = \frac{n\pi}{l}, \Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l}$$

домн. т.к. равномерн. на Δy_n

$$= \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos y_n(t-x) \cdot \Delta y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(y(t-x)) dy \quad (*)$$

умножаем на $\Delta y_n = \frac{\pi}{l}$, делим на $\frac{\pi}{l}$

Перейдем в (*) к пределу при $l \rightarrow \infty$

$$\int_{-l}^l f(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \text{const} < +\infty$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(y(t-x)) dy \right) dt =$$

$\cos(yt)\cos(yx) + \sin(yt)\sin(yx)$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos yt dt \right) \cos yx + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin yt dt \right) \sin yx \Big| dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy \quad a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dt$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ty dt$$

ЗАМЕЧАНИЕ:

Эти ф-ии очень похожи на ф-ии для разложения ф-ии в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2.2. ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЯЕМОСТИ Ф-ИИ В ТОЧКЕ ЕЁ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ.

Опр Ф-ия $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся кусочно-гладкой, если $\forall \varepsilon > 0$ эта ф-ия f на $[-\varepsilon; \varepsilon]$ является кусочно-гладкой в смысле теории рядов Фурье.

ТЕОРЕМА. (О представляемости ф-ии в точке её интегралом Фурье.)

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - кусочно-гладкая, абс. инт. ф-ия (т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$)

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

Док-во:

Доказывать не будем, док-во аналогично док-ву теоремы о представляемости ф-ии в точке её рядом Фурье. Только нужно потрудиться (следующим вариантом леммы Римана - Лебега).

Если $a \in \mathbb{R}$ и I - отрезок из интервалов $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty; +\infty)$ и $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ - абс. инт.

$$\text{Тогда } \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) \sin px dx = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) e^{\pm i p x} dx = 0$$

2.3 Представление ф-ии на полупрямой ЕЕ интегралом Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство.

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \text{ где } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy dx$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy dx$$

Случай I: Пусть еще f - четная. Тогда $b(y) = 0$ и

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx - \text{прямое косинус преобразование.}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(y) \cos xy dy - \text{обратное косинус преобразование}$$

Случай II: Если f - нечетн., то $a(y) = 0$,

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin xy dx - \text{прямое синус преобразование}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(y) \sin xy dy - \text{обратное синус преобразование}$$

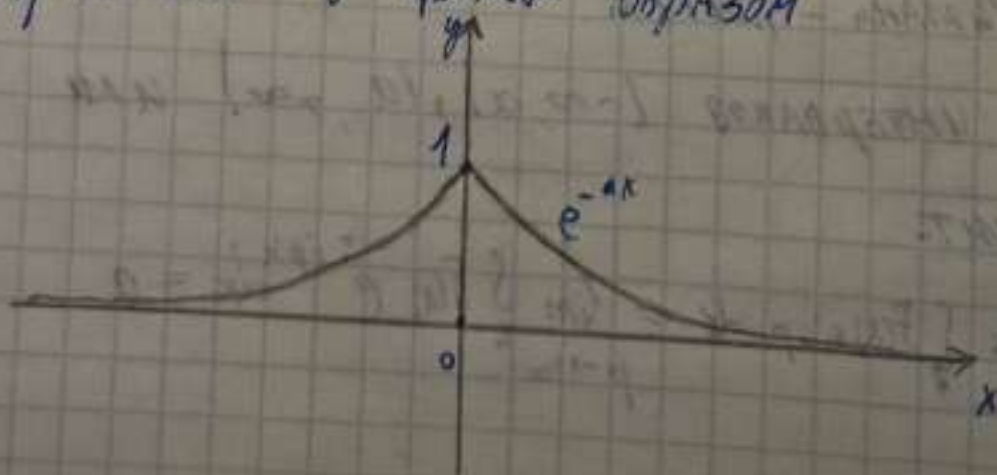
Случай III: Если $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, то мы можем продолжить ЕЕ в $\mathbb{R}$ четным образом (и воспользоваться формулами в случае I) или нечетным образом (и восп. ф-ми из случая II)

2.4 Пример представления ф-ии ЕЕ интегралом Фурье

Пусть $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, задана формулой

$$f(x) = e^{-ax}, \text{ где } a > 0, x > 0$$

Продолжим f - четным образом



$$f(x) = e^{-a|x|}, x \in \mathbb{R}$$

Тогда $a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \stackrel{\text{по частям}}{=} \frac{-2}{a\pi} \int_0^{\infty} \cos xy \, d(e^{-ax}) =$

$$= -\frac{2}{a\pi} \left(e^{-ax} \cos xy \Big|_{x=0}^{x=\infty} + y \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx \right) = \frac{2}{\pi a} - \frac{2y}{\pi a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx \stackrel{\text{по частям}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi a} + \frac{2y}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \sin xy \, d(e^{-ax}) = \frac{2}{\pi a} + \frac{2y}{\pi a^2} \left(e^{-ax} \sin xy \Big|_0^{\infty} - y \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \right) =$$

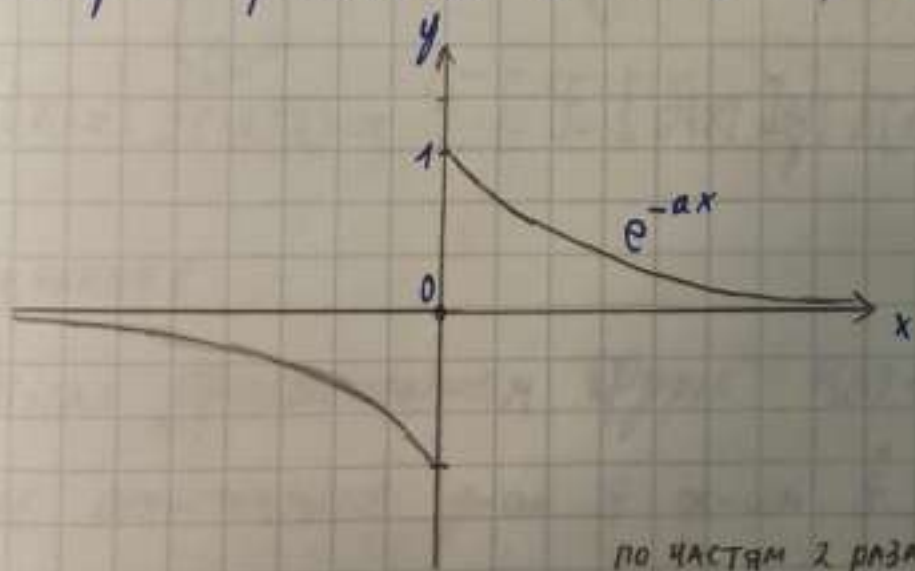
$$= \frac{2}{\pi a} - \frac{y^2}{a^2} a(y) \Rightarrow \left(1 + \frac{y^2}{a^2} \right) a(y) = \frac{2}{\pi a} \Rightarrow a(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + y^2}$$

$$\forall x \in [0, +\infty) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + y^2} \cdot \cos xy \, dy$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} e^{-ax} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax} \quad \forall x \geq 0$$

Интеграл Лапласа, который из вестен из
МАТ. АНАЛИЗА.

Теперь продолжим $f(x) = e^{-ax}$; $x > 0$ на $\mathbb{R}$ до нечетной ф-ии



$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx \stackrel{\text{по частям 2 раза}}{=} \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2} \sin xy \, dy \quad \forall x > 0$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} e^{-ax} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0 \rightarrow \text{Тоже интеграл Лапласа}$$

2.5. Интеграл Фурье в комплексной форме.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \text{ где } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy dx$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy dx$$

из ТФКП $\Rightarrow$ формулы Эйлера: $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} \left(a(y) \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2} + b(y) \frac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{2i} \right) dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} + \frac{a(y) + ib(y)}{2} e^{-ixy} \right) dy \quad \text{Замени } y \rightarrow -y$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a(-y) + ib(-y)}{2} e^{ixy} dy \Rightarrow$$

$$a(-y) = a(y)$$

$$b(-y) = -b(y)$$

т.к. $a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dt$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos ty - i \sin ty) dt \right) e^{ixy} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} dy \quad (*)$$

Интеграл Фурье в комплексной форме

В связи с этой формулой введём обозначения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \stackrel{\text{обозн}}{=} \hat{f}(\omega) \quad - \text{прямое преобразование Фурье ф-ии } f \text{ в точке } \omega.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega \stackrel{\text{обозн}}{=} \check{g}(x) \quad - \text{обратное преобразование Фурье ф-ии } g \text{ в точке } x.$$

$$F_+[f(x)](\omega) \quad - \text{прямое преобразование Фурье ф-ии } f \text{ в точке } \omega$$

(ещё одно обозначение)

$$F_-[g(\omega)](x) \quad - \text{обратное преобразование Фурье ф-ии } g \text{ в точке } x$$

(ещё одно обозначение)

Тогда ф-му (*) можно переписать так:

$$\begin{aligned} f(x) &= \widehat{\hat{f}}(x) = F_-[F_+[f(x)](\omega)](x) \\ \text{Аналогично} \quad f(x) &= \widehat{\check{f}}(x) = F_+[F_-[f(x)](\omega)](x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Формулы обращения} \\ \text{преобразования Фурье.} \end{array} \right\}$$

Замечание 1.:

Иногда "преобразованием Фурье" наз-ют не ф-ию $\hat{f}$, а само правило, которое сопоставляет ф-ии f ф-ию $\hat{f}$.

Замечание 2.:

В разных книгах можно увидеть разные определения преобразования Фурье

Замечание 3:

При изучении преобр. Фурье естественно рассматривать ф-ии $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = f'(x) + i f''(x), \text{ где } f'(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f''(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{теор}}{=} \int_a^b f'(x) dx + i \int_a^b f''(x) dx$$

Упр.

Д, ок-то, что ф-ла обращения справедлива для комплексных значений ф-ции

2.6. Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана ф-ой

$$f(x) = e^{-ax^2}, \text{ где } a > 0$$

Найти $\hat{f}(y)$ и $\check{f}(y)$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-iyx} dx \quad (\equiv)$$

Лекция 8. 26.10.2020

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2 + 2\sqrt{a}x \cdot i \frac{y}{2\sqrt{a}} + \left(\frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{iy}{2\sqrt{a}})^2} dx \quad \text{ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ: } z = \sqrt{a}x + \frac{iy}{2\sqrt{a}}, dz = \sqrt{a}dx$$

Обозначим γ - кривая, по которой пробегает z при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{y^2}{4a}} \int_{\gamma} e^{-z^2} dz \quad (*)$$



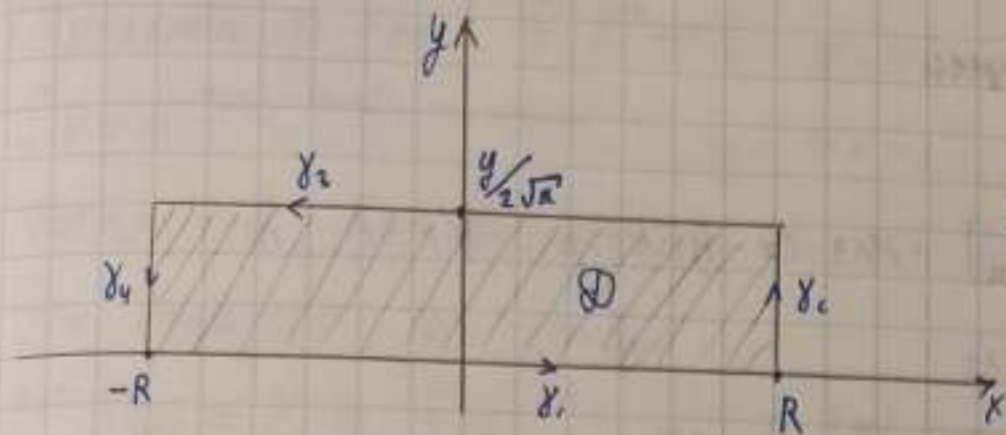
Из ТФКП: $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ (ИТК. $f(z)$ - аналит. в D) ТАКЖЕ D -огр., НАШЕ D -НЕОГР.

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad \text{ИНТЕГРАЛ Пуассона (НЕ МОЖЕМ ВОСП., Т.К. НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ УСЛОВИЕ ИТК.)}$$

У нас D - не огр. и $z = \infty$ - ЛЕЖИТ НА ГРАНИЦЕ D , и при этом ЯВЛЯЕТСЯ

Особой точкой ф-ии $f(z) = e^{-z^2}$

ф-ии



А, для этой области можно применить интегральную теорему Коши:

По КТ.К.: $\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz = 0 \quad (\Rightarrow)$

Перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad ;$$

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \rightarrow 0, \text{ параметр } \gamma_2: z = R + it \quad 0 \leq t \leq \frac{y}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{y/(2\sqrt{a})} e^{-(R^2 + 2itR - t^2)} i dt \right| \leq \int_0^{y/(2\sqrt{a})} e^{-R^2} e^{-t^2} dt = \int_0^{y/(2\sqrt{a})} \frac{e^{-t^2} dt}{e^{R^2}} = \frac{\text{const}}{e^{R^2}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = - \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz$$

$$\int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz \rightarrow 0, \text{ так же как и } \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Значит $(\Rightarrow)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad - \text{значит можем подставить в ф-лу (*)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-y^2/4a} = \hat{f}(y)$$

Заметим, что $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(-y)} dx = \hat{f}(-y)$

Значит, $e^{-x^2/2a} = \widehat{e^{-x^2/2a}}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-y^2/4a}$

2.7 Быстро убывающие функции

Опр 1 Мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ наз-ся вектор: $\forall k=1, \dots, n$

α_k - целое неотрицательное число

n - длина мультииндекса

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ - вес мультииндекса

$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ - факториал мультииндекса

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

$\alpha \leq \beta \stackrel{\text{def}}{=} \forall k \alpha_k \leq \beta_k$

$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ - Производная порядка α , где α - мультииндекс

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Опр 2 Ф-ия $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся Б-у (быстро убывающей), если

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2) $\forall \alpha$ - мультииндекс и $\forall p > 0 \exists K_{\alpha,p} = \text{const} < +\infty$:

$$|D^\alpha f(x)| \leq \frac{K_{\alpha,p}}{1+|x|^p}, \text{ где } |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ - длина вектора } x \in \mathbb{R}^n$$

Опр 3 Ф-ия $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся Б-у, если

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

2) $\forall \alpha, \beta$ - мультииндекс $\exists C_{\alpha,\beta} = \text{const} < +\infty$:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ЛЕММА (БЕЗ ДОК-ВА)

Определение для Б-у Ф-ии эквивалентны

Пример б-у ф-ии

Определим ф-ию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ф-ной

$$f(x) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \dots - a_n x_n^2}, \text{ где } \forall k=1, \dots, n \quad a_k > 0$$

Тогда f - б-у ф-ия

Это следует из ф-лы

$$D^\alpha f(x) = P_\alpha(x) f(x), \text{ где } P_\alpha(x) - \text{некоторый многочлен, т.е.}$$

$$P_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leq N} A_{\alpha, \beta} \cdot x^\beta$$

Это доказывается по индукции. Из него следует, что $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и
следует св-во $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{-N} D^\alpha f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (|D^\alpha f(x)| + |x|^N) = 0$, поскольку

на ∞ экспонента растёт быстрее любого многочлена.

Затем нужно использовать св-во: Если непрерывная ф-ия $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ стремится к 0 на бесконечности, то она ограничена

Св-ва б-у ф-ий (здесь $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - б-у)

1) линейность лн-ва б-у ф-ий

$\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-ия $a f + b g$ - явл. б-у. ф-ия

Док-во (по определению 3)

Условие (1) очевидно: $a f + b g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Условие (2): $\forall \alpha, \beta$ - мультииндексы

$$|x^\alpha D^\beta (a f(x) + b g(x))| \leq |a| \cdot |x^\alpha D^\beta f(x)| + |b| \cdot |x^\alpha D^\beta g(x)| \leq$$

\text{нер-во треугольника}

$$\leq |a| \cdot C_{\alpha, \beta}(f) + |b| \cdot C_{\alpha, \beta}(g) = \text{const} < +\infty, \text{ значит усл. 2 - выполн.}$$

значит $a f + b g$ - б-у. ф-ия

2) $\forall \alpha$ - мультииндекс ф-ия $D^\alpha f(x)$ - является б-у.

Док-во:

Проверяем усл. опр. 3

Условие 1 - очевидно: $\forall \gamma$ - мультииндекс $D^\gamma [D^\alpha f] = D^{\alpha+\gamma} f$

$$\Rightarrow D^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Условие 2: $|x^\gamma D^{\alpha+\beta} f(x)| = |x^\gamma D^{\alpha+\beta} f(x)| \leq C_{\gamma, \alpha+\beta} = \text{const} < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\forall P(x)$ - многочлен, $f(x)$ - б-у ор-ч-я
ор-ч-я $f(x)P(x)$ - является б-у

Док-во:

проверим условие отр. 3

Условие (1) очевидно выполнено

Условие (2) $\forall \alpha, \beta$ - мультииндексы $|x^\alpha D^\beta [f(x)P(x)]|$

I шаг.

$$(*) \quad D^\alpha (f(x)P(x)) = \sum_{\gamma \leq \alpha} Q_\gamma(x) \cdot D^\gamma f(x) \quad \text{— это следует из формулы Лейбница } (uv)' = u'v + uv'$$

многочлен

В наших обозначениях $\alpha = 1$

$$D^\alpha (uv) = (D^\alpha u)v + u(D^\alpha v)$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

В общем случае (когда переменных много и производных берется высшего порядка) ор-ла Лейбница выглядит так:

$$D^\alpha (uv) = \sum_{\gamma \leq \alpha} A_{\alpha, \gamma} D^\gamma u D^{\alpha-\gamma} v$$

II шаг

$D^{\alpha-\gamma} P(x)$ - многочлен - очевидно

III шаг.

$$\text{Условие (2): } |x^\alpha D^\beta (f(x)P(x))| = |x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} Q_\gamma(x) D^\gamma f(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \sum_{\delta \leq \beta-\gamma} |B_{\gamma, \delta}| |x^\delta D^\delta f(x)| = \text{const} < +\infty$$

" $C_{\gamma, \delta} = \text{const}$ "

Значит $P(x) \cdot f(x)$ - б-у ор-ч-я

$x \in \mathbb{R}^n$

ЗАМЕЧАНИЕ 1:

- 1) Совокупность всех б-у ф-ий образует линейное пр-во.
Обозначается $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

ЗАМЕЧАНИЕ 2:

- 2) и 3) $\Rightarrow$ операции диф-ии и умножения на многочлен (в частности умножения на мономи x^2), не выводят за пределы $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2.8 Преобразования Фурье быстроубывающих функций

Опр Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - б-у. ф-ия. Построим по f две новые ф-ии

$$(*) \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx$$

, где $(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ - скалярное произведение в пр-ве $\mathbb{R}^n$

$$(**) \quad \check{f}(y) = (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(x,y)} dx$$

Прямое преобразование Фурье ф-ии f называют:

- а) ф-ию $\hat{f}$ определённую по $(*)$
б) правило, сопоставляющее ф-ии f ф-ию $\hat{f}$ (правило $\mathcal{F}_+$), т.е.
 $\mathcal{F}_+[f(x)](y) = \hat{f}(y)$

Обратным преобразованием Фурье ф-ии f называют

- а) ф-ию $\check{f}$ определённую по $(**)$
б) правило $\mathcal{F}_-$, сопоставляющее ф-ии f ф-ию $\check{f}$ по ф-ле $(**)$, т.е.
 $\mathcal{F}_-[f(x)](y) = \check{f}(y)$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Оба интеграла $(*)$ и $(**)$ сходятся, т.к. $|f(x) e^{\pm i(x,y)}| = |f(x)| \leq \frac{K}{1+|x|^p}$

Однако, $\forall p > n \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1+|x|^p} < +\infty$

ЗАМЕЧАНИЕ

При $n=1$ ф-ии $(*)$ и $(**)$ дают определения прямого и обратного преобраз. Фурье, которое мы использовали в пункте 2.5

$$\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\mp ixy} dx$$

Лекция 9. 2. 11. 2020

СВ-ВА преобразования Фурье б-у. ф-ий
(здесь f, g - будут б-у. ф-ии)

1) (линейность): $\forall a, b \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}_{\pm}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}_{\pm}[f(x)] + b\mathcal{F}_{\pm}[g(x)]$$

Док-во:

$$\mathcal{F}_{\pm}[af(x) + bg(x)](y)$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [af(x) + bg(x)] \cdot e^{\mp i(x,y)} dx \stackrel{\text{линейности интеграла}}{=} a(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx +$$

$$b(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)} dx = a\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y) + b\mathcal{F}_{\pm}[g(x)](y)$$

2) $\forall \alpha$ - мультииндекс справедливо:

$$\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)] = (\mp i)^{|\alpha|} \mathcal{Q}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)]), \text{ где } x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Док-во:

I шаг:

пусть $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)])(y) &= \frac{\partial}{\partial y_k} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mp i x_k) e^{\mp i(x,y)} dx \\ &= (\mp i) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_k f(x) e^{\mp i(x,y)} dx = (\mp i)^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)](y) \end{aligned}$$

Далее рассуждаем по индукции: $|\alpha| = 1$ - база индукции, доказана на первом шаге.

II шаг:

Пусть СВ-во 2 верно $\forall \alpha: |\alpha| = N$. Докажем что оно верно для мультииндекса $\alpha: |\alpha| = N+1$

Если $|L| = N+1$, то $\exists \beta$ и γ - мультииндексы: $|\beta| = N$, $|\gamma| = 1$ и $L = \beta + \gamma$

Тогда $\mathcal{F}_{\pm}[x^L f(x)] = \mathcal{F}_{\pm}[x^{\beta}(x^{\gamma} f(x))] \stackrel{2)}{=} (\pm i)^{|\gamma|} \mathcal{D}^{\gamma}[\mathcal{F}_{\pm}[x^{\beta} f(x)]] =$
 $= (\pm i)^{|\gamma|} \mathcal{D}^{\gamma}[(\pm i)^{|\beta|} \mathcal{D}^{\beta}[\mathcal{F}_{\pm}[f(x)]]] = (\pm i)^{|\gamma|+|\beta|} \mathcal{D}^{\beta+\gamma}[\mathcal{F}_{\pm}[f]] =$
 $= (\pm i)^{|L|} \mathcal{D}^L[\mathcal{F}_{\pm}[f]]$

по предп. индукции

3) $\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^L f(x)](y) = (\pm i y)^L \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y)$

Док-во

I: Пусть $L = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{K-е место}}{1}, 0, \dots, 0)$

$f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x, y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x, y)} dx_n$
 по частям

$\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^L f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_K} f(x) \cdot e^{-i(x, y)} dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_K}(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x, y)} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{K-1} dx_{K+1} \dots dx_n =$

$(\pm i y_K) (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x, y)} dx_n \right) \cdot e^{-i(x, y)} dx_1 \dots dx_{K-1} dx_{K+1} \dots dx_n =$
 $= (\pm i y_K) (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x, y)} dx = (\pm i y)^L \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y)$

Итак, СВ-во (3) - справедливо $\forall L: |L|=1$

Далее по индукции

II: Пусть (3) - верно $\forall L: |L| \leq N$. Докажем его для $L: |L| = N+1$

$\exists \beta, \gamma: |\beta| = N, |\gamma| = 1, L = \beta + \gamma$

$\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^L f(x)](y) = \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^{\beta}(\mathcal{D}^{\gamma} f)](y)$ по предположению индукции

$(\pm i y)^{\beta} \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^{\gamma} f](y) \stackrel{\text{по I инд}}{=} (\pm i y)^{\beta} (\pm i y)^{\gamma} \mathcal{F}_{\pm}[f](y) =$

$= (\pm i y)^L \mathcal{F}_{\pm}[f](y)$

Замечание:

(СВ-во 2) $\mathcal{F}_{\pm}[x^L f(x)] = (\pm i)^{|L|} \mathcal{D}^L \mathcal{F}_{\pm}[f]$ и СВ-во 3)

$\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^L f(x)](y) = (\pm i y)^L \mathcal{F}_{\pm}[f](y)$, словами выражают вот так:

Преобразование Фурье переводит операцию умножения на независимую переменную в операцию диф-ия (с точностью до некоторой постоянной)

и наоборот.

Раньше: экспонента и логарифм переводят операции сложения в операции умножения и наоборот: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $\log(zw) = \log z + \log w$

$$4) \mathcal{F}_{\pm}[f(x+x_0)](y) = e^{\pm i(x_0, y)} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y), \text{ следовательно:}$$

Преобразование Фурье переводит сдвиг по аргументу в сдвиг по фазе

Док-во

$$\mathcal{F}_{\pm}[f(x+x_0)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+x_0) e^{\pm i(x, y)} dx \stackrel{\text{замена } z=x+x_0}{=}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \underbrace{e^{\pm i(z-x_0, y)}}_{e^{\pm i(z, y)} \cdot e^{\mp i(x_0, y)}} dz = e^{\pm i(x_0, y)} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y)$$

5) Если $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ то

$$\mathcal{F}_{\pm}[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right) - \text{правило изменения масштаба}$$

Док-во

$$\mathcal{F}_{\pm}[f(ax)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{\pm i(x, y)} dx \stackrel{\text{замена } z=ax}{\equiv}$$

$$dz = |a|^n dx$$

модуль якобиана

$$\equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\pm i\left(\frac{z}{a}, y\right)} \frac{dz}{|a|^n} = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)]\left(\frac{y}{a}\right)$$

6) Если f - б.у. ф-ция, то $\mathcal{F}_{\pm}[f]$ - тоже б.у. ф-ция.

Док-во

$$(\text{в-во } 2) \Rightarrow \mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^{\alpha}[\mathcal{F}_{\pm}[f]]$$

Поэтому $\mathcal{F}_{\pm}[f]$ - бесконечно диф-ма

Пусть α, β - мультииндексы

$$\text{Ду.е.в.м.} \quad |y^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta}(\mathcal{F}[f(x)](y))| \stackrel{(2)}{=} |y^{\alpha} \mathcal{F}_{\pm}[x^{\beta} f(x)](y)| \stackrel{(3)}{=} \quad$$

$$(\text{св-во } 3) \Rightarrow \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^{\alpha} f(x)](y) = (\pm i y)^{\alpha} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y)$$

$$\Leftrightarrow |\mathcal{F}_\pm[\mathcal{D}^\alpha(x^\beta f(x))](y)| \Leftrightarrow \text{Обозначим } g(x) = \mathcal{D}^\alpha[x^\beta f(x)] - \text{это б-у ф-ия}$$

б-у ф-ия, обозн g

$$\Leftrightarrow (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)} dx \quad \text{нужно док-ть, что огр}$$

Из МАТ. АНАЛИЗА $\Rightarrow$

Если $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - непрерывна и $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, то h - ограниченная ф-ия.

т.е. $\exists C < +\infty : |h(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Если $y \rightarrow \infty$, то $\exists$ компонента y вектора x , которая стремится к ∞ .

Пусть $y_n \rightarrow \infty$ Тогда

$$\Leftrightarrow (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) e^{-ix_n y_n} dx_n \right) e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

параметры $y_n \rightarrow \infty \rightarrow 0$ По Лемме Римана Лебега

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

7) Формула обращения:

$$\mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[f]] = f$$

Док-во

При $n=1$ уже знаем эту ф-лу из пункта 2.5

Далее - по индукции. Сделаем шаг индукции, при $n=2$:

$$\mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[\mathcal{F}(x)](y)](z) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x_1, x_2) e^{\mp i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dx_1 dx_2 \right] \frac{1}{2\pi} e^{-i(y_1 z_1 + y_2 z_2)} dz_1 dz_2 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(x_1, x_2) e^{\mp i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dx_2 \right) e^{-iy_1 z_1} dz_1 \right) e^{\mp i(x_1 y_1)} dx_1 e^{-iy_2 z_2} dz_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_1, x_2) e^{ix_2 y_2} dx_2 \right) e^{-iy_2 z_2} dy_2 \right) e^{\mp i(x_1 y_1)} dx_1 \right) e^{-iy_1 z_1} dz_1 =$$

одномерное обратное преобразование Фурье, где x_1 - параметр

одномерное прямое преобразование Фурье.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z_2) e^{+ix, y_1} dx_1}_{\substack{\text{обратное преобразование Фурье} \\ \text{причём } z_2 - \text{параметр}}} \right) e^{-iy_1, z_1} dy_1 =$$

прямое преобразование Фурье, посчитанное в точке z_1 .

$$= f(z_1, z_2) = f(z)$$

Лекция 10. 9.11.2020

2.9. Равенство Парсеваля Теорема (равенство Парсеваля)

Пусть $n \geq 1$ и $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_\pm(y) \cdot \overline{\widehat{g}_\pm(y)} dy, \text{ где черта - комплексное сопряжение}$$

Доказ-во:

Шаг I: покажем, что $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{f}_\pm[g](x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_\pm[f](x) g(x) dx$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{+iy, x} dy \right] dx = \left\langle \text{меняем порядок интегрирования} \right\rangle =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{+iy, x} dx \right] dy$$

Шаг II: покажем, что $\widehat{f}_\pm[f](x) = \widehat{f}_\mp[\overline{f}](x)$:

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{+i(x, y)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)} e^{-i(x, y)} dy$$

Шаг III: объединяем шаги I и II:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}_{\pm} [\hat{F}_{\pm} [f]](y) \overline{\hat{F}_{\pm} [g](y)} dy =$$

$$\stackrel{\textcircled{I}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}_{\pm} [f](y) \hat{F}_{\pm} [\overline{g}](y) dy \stackrel{\textcircled{II}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}_{\pm} [f](y) \overline{\hat{F}_{\pm} [g](y)} dy \quad \blacksquare$$

Замечание:

Равенство Парсеваля для преобразования Фурье аналогично равенству Липшуца для рядов Фурье. В самом деле, при $f=g$ равенство Парсеваля даёт

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 dy, \text{ что очень похоже на равенство Липшуца:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2, \text{ где } C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \text{ — коэффициенты}$$

ряда Фурье ф-ии f в комплексной форме.

2.10 Дальнейшие свойства преобразования Фурье.

Опр Пусть $n \geq 1$ и $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Функция $f * g$, заданная формулой $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ наз-ся свёрткой ф-ии f и g .

Замечание

Свёртка оказывается полезной при изучении дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистике, обработке сигналов.

С-ва свёртки (здесь $f, g, h \in S(\mathbb{R}^n)$):

- 1) $f * g = g * f$ — коммутативность;
- 2) $(f * g) * h = f * (g * h)$ — ассоциативность;
- 3) $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad (af + bg) * h = a(f * h) + b(g * h)$ — линейность;
- 4) $\forall \alpha$ — мультииндекс $\mathcal{D}^{\alpha}(f * g) = (\mathcal{D}^{\alpha} f) * g = f * (\mathcal{D}^{\alpha} g)$ — правила диф-ия свёртки;
- 5) $\hat{F}_{\pm} [f * g] = (2\pi)^{n/2} \hat{F}_{\pm} [f] \hat{F}_{\pm} [g]$ — преобразование Фурье переводит свёртку в умножение (с точностью до постоянного множителя), и наоборот:

$$6) \mathcal{F}_{\pm}[f \cdot g] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{\pm}[f] * \mathcal{F}_{\pm}[g]$$

Замечание:

Корректности определения (т.е. сходимость интеграл, задающего свёртку) и
 А-В-О (В-В-О 1)-4) - упр.

Докажем (В-В-О 5):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}[f * g](x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) e^{\mp i(x,y)} dy = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) g(z) dz \right] e^{\mp i(x,y)} dy = \text{Меняем порядок интегрирования.} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) e^{\mp i(x,y)} dy \right] g(z) dz = \text{Замена } y-z=t \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x,t+z)} dt \right] g(z) dz = \text{умн. и делим на } (2\pi)^{\frac{n}{2}} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x,t)} dt \right] g(z) e^{\mp i(x,z)} dz = \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{\pm}[f](x) \cdot \mathcal{F}_{\pm}[g](x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(А-В-О 6) может быть доказано аналогично Аок-Ву (В-В-О 5).

Но мы докажем его по-другому - Применим (В-В-О 5) к ор-чпа $\mathcal{F}_{\pm}[f], \mathcal{F}_{\pm}[g]$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{F}_{\pm}[f] * \mathcal{F}_{\pm}[g]] &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{F}_{\pm}[f]] \cdot \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{F}_{\pm}[g]] = \text{ор-ли обратности} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} f \cdot g \quad \text{Подставляем на это равенство } \mathcal{F}_{\pm} \text{ и воспользовавшись ор-ой обратности, получим:} \\ \mathcal{F}_{\pm}[f] * \mathcal{F}_{\pm}[g] &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{\pm}[f \cdot g] \quad \text{Делим на } (2\pi)^{\frac{n}{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание:

(Свойства 5) и 6) дают ещё одно объяснение важности (или функциональности) операции свёртки: с точностью до преобразования Фурье свёртка и есть умножение.

Есть два свойства без док-во:

Теорема (формула Пуассона)

$\forall f \in S(\mathbb{R})$ имеем:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(h)$$

Теорема (формула Котельникова - Шеннона):

Пусть $f \in S(\mathbb{R})$ и $\exists a > 0 : \hat{f}(x) = 0 \quad \forall x : |x| > a$

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \operatorname{sinc}\left(a\left(x - \frac{\pi n}{a}\right)\right), \text{ где}$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t} - \text{функция отсчетов; } \frac{\pi n}{a} - \text{точка отсчета}$$

Замечание:

Все утверждения п. 2.10. являются МАТ. основой теории передачи сигналов.

§3 Преобразование Лапласа

3.1 Определение и основные свойства преобразования Лапласа

Опр 1. Функция $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся оригиналом, если

1) f - непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек;

2) $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$

Опр 2: Пусть f - оригинал. Число $\inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \}$ -

наз-ся показателем роста ф-ции f и обозначается $\alpha(f)$

Замечание:

Мн-во $\{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \}$ является непустым интервалом в $\mathbb{R}$,

т.к. если α принадлежит этому множеству, то любое число $\beta > \alpha$ - тоже

принадлежит этому множеству.

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty,$$

Иногда непустого интервала равен его левому концу (и не важно, принимает ли этот левый конец интервалу или нет). Но в любом случае $\forall \varepsilon > 0$ число $a(f) + \varepsilon$ принадлежит множеству $\{a \in \mathbb{R} \mid \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty\}$.

Опр. 3 Пусть $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ - оригинал.

Тогда $\forall p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a(f)$ построим новую функцию

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (*)$$

Говорят, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, или что $F(p)$ является преобразованием Лапласа ф-ции $f(t)$

Обозначение: $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$ или $\mathcal{L}(f) = F(p)$

Замечание: Если $\operatorname{Re} p > a(f)$, то интеграл $(*)$ - с.х.-с.х.:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-pt}| dt =$$

$$e^{-(\operatorname{Re} p)t} \cdot e^{-i(\operatorname{Im} p)t}; \quad |e^{-i(\operatorname{Im} p)t}| = 1$$

$$= \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-(\operatorname{Re} p)t} dt \quad \textcircled{<}$$

Если $\operatorname{Re} p > a(f)$, то $\exists \varepsilon > 0 : \operatorname{Re} p > a(f) + \varepsilon$

$$\textcircled{<} \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-(a(f) + \varepsilon)t} dt < +\infty$$

Опр. 4 Преобразованием Лапласа называют также само правило (отображение), сопоставляющее оригиналу $f(t)$ изображение $F(p)$ с помощью формулы $(*)$

Св-ва преобразования Лапласа.

Здесь f и g - оригиналы, а св-ва надо читать так:

"Если существуют преобразования Лапласа, стоящие и в левой и в правой частях равенства, то это равенство имеет место".

1) (Линейность): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}$$

Док-во:

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(p) = \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \\ = \alpha \mathcal{L}\{f\}(p) + \beta \mathcal{L}\{g\}(p)$$

Замечание: для св-ва 1) легко указать условие его применимости:
 $\operatorname{Re} p > \max\{\alpha(f), \alpha(g)\}$

2) (Теорема смещения): $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t} f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p + \lambda)$$

Док-во:

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t} f(t)\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+\lambda)t} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(p + \lambda)$$

Замечание: для св-ва 2) легко указать условие его применимости:
 $\operatorname{Re}(p + \lambda) > \alpha(f)$, т.е. $\operatorname{Re} p > \alpha(f) - \operatorname{Re} \lambda$

3) (Теорема о дифференцировании оригинала):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = p \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Док-во

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt \stackrel{\text{по частям}}{=} \left. f(t) e^{-pt} \right|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) e^{-pt} + p \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$\begin{matrix} \text{0} \nwarrow & \nearrow \text{f(0)} \\ \text{t} \rightarrow \infty & \text{t} \rightarrow 0+ \end{matrix}$

Если докажем эти равенства, то св-во 3) будет доказано

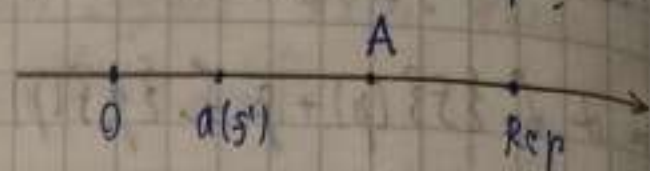
б) По условию f' является оригиналом, т.е. f' определена на $[0, +\infty)$. Значит f' — д.и.ф. — ма в 0. Из мат. анализа $\Rightarrow$ если ф-ция Акор-ма в точке, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, f непрерывна в нуле. Значит

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) e^{-pt} = \lim_{t \rightarrow 0+} f(0) \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-pt} = f(0)$$

а) Будем предполагать $\operatorname{Re} p > \alpha(f')$ и $\operatorname{Re} p > 0$

Выберем вспомогательное число A так, чтобы $A > 0$, $A > a(f')$ и $A < \operatorname{Re} p$.

Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t) e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-pt} [\int_0^t f'(s) ds + f(0)]| \leq$



$$\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-pt}| \cdot \int_0^t |f'(s)| ds + \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-pt}| \cdot |f(0)| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\operatorname{Re} p)t} \cdot e^{At} \cdot e^{-At} \int_0^t |f'(s)| ds + \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\operatorname{Re} p)t} |f(0)| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-[(\operatorname{Re} p) - A]t} \cdot \int_0^t |f'(s)| e^{-As} ds \leq$$

"0, т.к. $\operatorname{Re} p > 0$

" e^{-As} , т.к. $s \leq t$ и $A > 0$, A значит $As \leq At$,
 $-As \geq -At$ $e^{-As} \geq e^{-At}$

$$\leq \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-[(\operatorname{Re} p) - A]t} \right\} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |f'(s)| e^{-As} ds = 0$$

"0, т.к. $\operatorname{Re} p > A$

" $\int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-As} ds < +\infty$, т.к. $A > a(f')$

4) (ТЕОРЕМА ПРОИЗВОДНОЙ) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0$ ИМЕЕМ

$$\mathcal{L} \{ f(\lambda t) \} (p) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L} \{ f(t) \} \left(\frac{p}{\lambda} \right).$$

ДОКАЗЫВАЕМ:

$$\mathcal{L} \{ f(\lambda t) \} (p) = \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt =$$

ЗАМЕЧАНИЕ $dt = \frac{dy}{\lambda}$

$$= \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{\lambda} y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L} \{ f(y) \} \left(\frac{p}{\lambda} \right)$$

3.2 ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ О.Д.У.

СВ-ВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$5) \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Док-во.

По индукции

База индукции $n=1$ - уже доказали в п. 3.1.

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p \mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$$

Шаг индукции: допустим, что 5) верно для n и докажем его для $n+1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}\}(p) &= \mathcal{L}\{(f')^{(n)}\} = p^n \mathcal{L}\{f'\}(p) - p^{n-1}f'(0) - p^{n-2}f''(0) - \dots \\ &= p^n [p \mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)] - p^{n-1}f'(0) - \dots - f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

Задача Коши для О.Д.У.

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \\ f(0) = c_0 \\ f'(0) = c_1 \\ \dots \\ f^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{cases}$$

Пусть f - оригинал. Обозн. $F(p) = \mathcal{L}\{f\}(p)$

Будем искать решение $y(t)$ этой задачи, которое тоже является оригиналом.

Обозначим $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}(p)$

$$\begin{aligned} \text{По св-ву 5)} \Rightarrow & a_0 (p^n Y(p) - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \dots - c_{n-1}) + \\ & + a_1 (p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}c_0 - p^{n-3}c_1 - \dots - c_{n-2}) + \dots + a_{n-1} (pY(p) - c_0) + a_n Y(p) = F(p) \end{aligned}$$

Перепишем

$$R(p)Y(p) - T(p) = F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{F(p) + T(p)}{R(p)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$$

КАК-ТО МНОГОЧЛЕН

3.3. Дальнейшие св-ва преобразования Лапласа

6) Аналитичность изображения

$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$ является аналит. ф-ей компл. переменных z в

Полуплоскости $\operatorname{Re} z > a(f)$

Имеется лемма:

Из Токмп $\Rightarrow$ (ф-ия $F(z)$ аналитична $\Leftrightarrow \frac{dF}{dz} = 0$)

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \underbrace{\frac{d}{dz} e^{-zt}}_{=0} dt = 0$$

И.Т.Д.

Уточнение определения преобразования Лапласа:

Преобразование Лапласа $F(p)$ оригинала $f(t)$ является аналитической ф-ей $F(p)$, которая совпадает в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$ с аналитической ф-ей,

заданной формулой:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

7) Формула обращения

Пусть $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ - оригинал,

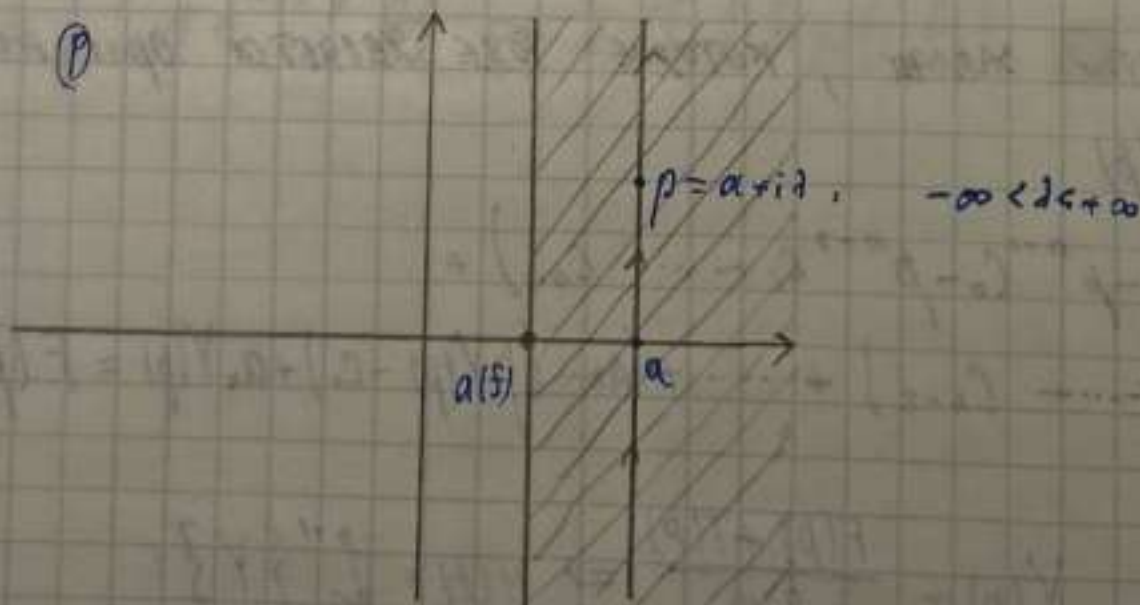
причем f - кусочно-гладкая ф-ия, f непрерывна и $f(0) = 0$.

Тогда $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$, где $a > a(f)$,

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

интеграл Бромвича

ф-ла Меллина



ДОКАЖЕМ 7):

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{e^{-(a+id)t}}_{e^{-at} e^{-idt}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(t) e^{-iat} dt =$$

$$\text{где } f_+(t) = \begin{cases} f(t) e^{-at/\sqrt{2\pi}}, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t \leq 0 \end{cases}$$

$$= \mathcal{F}_+ [f_+(t)](a)$$

- Применим к этому равенству $\mathcal{F}_-$:

$$f_+(t) = \mathcal{F}_- [\mathcal{F}_+ [f_+(t)](a)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+id) e^{+idt} da =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{(p-a)t} \frac{dp}{i} = \frac{e^{-at}}{i\sqrt{2\pi}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$\text{Значит, для } t > 0 \quad f(t) e^{-at/\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-at}}{i\sqrt{2\pi}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

Опр. Пусть f и $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ - оригиналы.

Новую ф-ию $f * g$, заданную для $t \geq 0$ формулой:

$$(f * g) = \int_0^t f(u) g(t-u) du - \text{называют свёрткой оригиналов } f \text{ и } g.$$

Замечание:

Если считать, что оригиналы f и g опред. на $(-\infty, +\infty)$, но $\forall t < 0$

$f(t) = g(t) = 0$, то определение свёртки оригиналов является следствием

определения свёртки из темы преобразования Фурье.

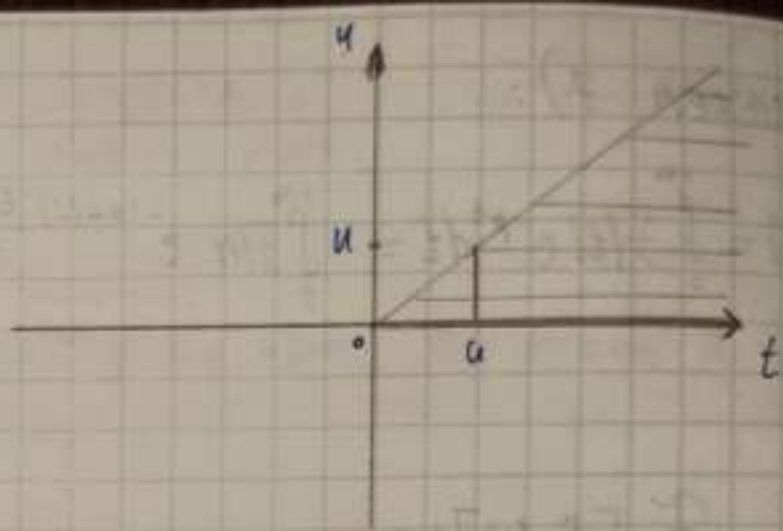
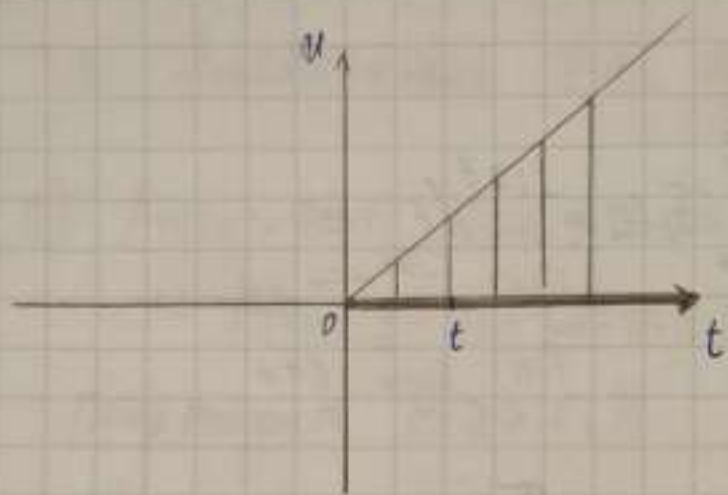
$$(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du$$

8) ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$$

Док-во:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(p) = \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(u) g(t-u) du \right] e^{-pt} dt \quad \ominus$$



$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \left[\int_u^{+\infty} g(t-u) e^{-pt} dt \right] f(u) du = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} g(z) e^{-p(z+u)} dz \right] f(u) du = \mathcal{L}\{g\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f\}(p)$$

ЗАМЕНА $z = t - u$ $e^{-pz} e^{-pu}$ Ч.Т.Д.

$\mathcal{L}\{g(z)\}(p)$

9) Формула Д.Ю.АМЕРА

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f * g)\right\}(p) = p \mathcal{L}\{f\}(p) \cdot \mathcal{L}\{g\}(p)$$

ДОК-ВО:

$$\mathcal{L}\{f'\} = p \mathcal{L}\{f\} - f(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f * g)\right\} = p \mathcal{L}\{f * g\} - (f * g)(0) =$$

Т.Борелля $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(t-u) du = 0$

$$= p \mathcal{L}\{f\}(p) \mathcal{L}\{g\}(p) \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

ЛЕКЦИЯ 12. 23.11.2020

§ 4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

- В МАТ. АНАЛИЗЕ: ФУНКЦИЯ СТАВИТ В СООТВЕТСТВИЕ КАЖДОМУ ЗНАЧЕНИЮ АРГУМЕНТА x ЕДИНСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(x)$
- В Т.Ф.К.П.: БЫВАЮТ МНОГОЗНАЧНЫЕ Ф-ЦИИ, НАПРИМЕР $\text{Ln } z$, КОТОРЫЕ ЗНАЧЕНИЮ АРГУМЕНТА z СОПОСТАВЛЯЮТ НЕСКОЛЬКО ЗНАЧЕНИЙ Ф-ЦИИ.
- В ДАННОМ ПАРАГРАФЕ ПОЗНАКОМИМСЯ С ПОНЯТИЕМ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ, Т.Е. "ФУНКЦИИ" КОТОРАЯ ВООБЩЕ НЕ ИМЕЕТ ЗНАЧЕНИЙ В ОТДЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ.

(59) ТОЧКЕ.

4.1 Пространство основных функций

Из мат. анализа:

Опр Открытый шар в $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\} = B(x_0, r)$ - открытый шар с центром $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - x_{0k}|^2}$ - расстояние между точками x и x_0 .

Опр Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся открытым, если $\forall x \in G \exists r > 0 : B(x, r) \subset G$, т.е. если вместе с каждой своей точкой G содержит и некоторый шар положительного радиуса с центром в этой точке.

Опр Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся связным, если любые две точки $x, y \in G$ можно соединить непрерывной кривой, все точки которой лежат в G .

Опр Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся ограниченным, если $\exists x \in \mathbb{R}^n$ и $\exists 0 < r < +\infty : G \subset B(x, r)$.

Примеры:

Множество G	Открытое?	Связное?	Ограниченное?
$\mathbb{R}^n$	ДА	ДА	НЕТ
$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$	ДА	ДА	НЕТ
$B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$	ДА	ДА	ДА
$[0, 1) \subset \mathbb{R}$	НЕТ	ДА	ДА
$(0, 1) \cup (2, 3) \subset \mathbb{R}$	ДА	НЕТ	ДА
$\emptyset$	ДА ^{упр}	НЕТ ^{упр}	ДА ^{упр}

Опр Предельной точкой мн-ва $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ из $\mathbb{R}^n$ такая, что (а) $\forall k \neq m \quad x_k \neq x_m$; (б) $\forall k \quad x_k \in G$; (в) $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$, т.е. $|x_k - x_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Опр Замыканием мн-ва $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся объединение мн-ва G и мн-ва всех его предельных точек. Обознач $\text{cl } G$ или $\bar{G}$

Пример.

$G = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Тогда $\text{cl } G = [0, 1]$.

Докажем, например, что 0 - является предельной точкой мн-ва G . Покажем, что

$x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ (в-ва (a)-(b) из определения предельной точки выполнены)

Поэтому 0 является предельной точкой. Аналогично и 1 является пред. точкой.

Опр Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся замкнутым, если $G = \text{cl } G$

Опр Область - это открытое связное мн-во

• Новые понятия

Опр Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ - ф-ия. Носителем функции φ

называют мн-во:

$\text{cl } \{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_1, \dots, x_k, \dots \in \mathbb{R}^n : (a) x_k \neq x_m \forall k \neq m;$

(б) $x_k \rightarrow x$; (в) $\varphi(x_k) \neq 0 \forall k\} \stackrel{\text{обозн.}}{=} \text{supp } \varphi$. от англ. слова

$\text{support} \equiv \text{носитель}$.

Пример: $G = (0, 1)$, $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in G$.

Тогда $\text{supp } \varphi = [0, 1]$. Видим, что $\text{supp } \varphi \not\subset G$

Опр Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$. Ф-ия φ наз-ся основной

(или пробной), если выполнены следующие условия:

(i) $\varphi \in C^\infty(G)$

(ii) $\text{supp } \varphi \subset G$, причем является ограниченным мн-вом.

Контрпример: $G = (0, 1)$; $\varphi \equiv 1$ - не явл. пробной в G , хотя и бек. диф-на

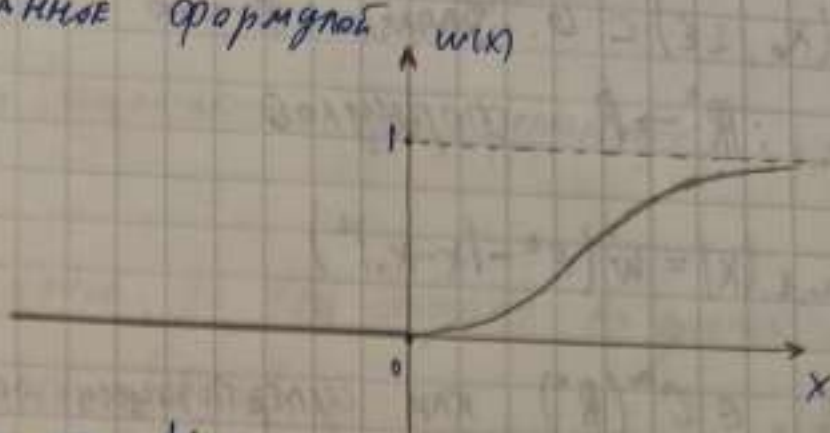
Пример: $G = (0, 1)$; $\varphi \equiv 0$. Тогда $\text{supp } \varphi = \emptyset$ и φ - пробная

• Бывают и менее тривиальные пробные ф-ии

• Воспомним из МАТ. АНАЛИЗА:

Пусть $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - отображение, заданное формулой

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$



из МАТ. АНАЛИЗА $\Rightarrow w \in C^\infty(\mathbb{R})$

ЦРЕЯ ДОК-ВА: По индукции выйдем, что $\forall k$

$$\frac{d^k w}{dx^k} = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Значит, w бесконечно диф-ма $\forall x \neq 0$

Производная в $x=0$ вычисляем тоже по индукции:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d^k w}{dx^k}(x) - \frac{d^k w}{dx^k}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

Значит, сущ. правая $(k+1)$ -я производная ф-ции w в $x=0$ и она равна 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d^{k+1} w}{dx^{k+1}}(x) - \frac{d^{k+1} w}{dx^{k+1}}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0,$$

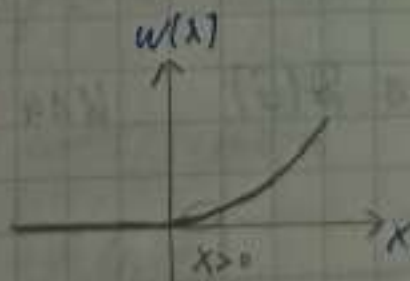
Значит сущ. левая $(k+1)$ -я производная ф-ции w в точке $x=0$ и она тоже равна 0.

Значит сущ. $(k+1)$ -я производная ф-ции w в точке $x=0$ и она равна 0.

Функция w возникает в МАТ. АНАЛИЗЕ, как пример бесконечно диф-об ф-ции, ряд Тейлора которой в точке $x=0$ не сходится к значению ф-ции $w(x)$ ни в какой окрестности этой точки:

$$0 < w(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{d^k w}{dx^k}(0)}_{=0} x^k = 0$$

если x -положительный

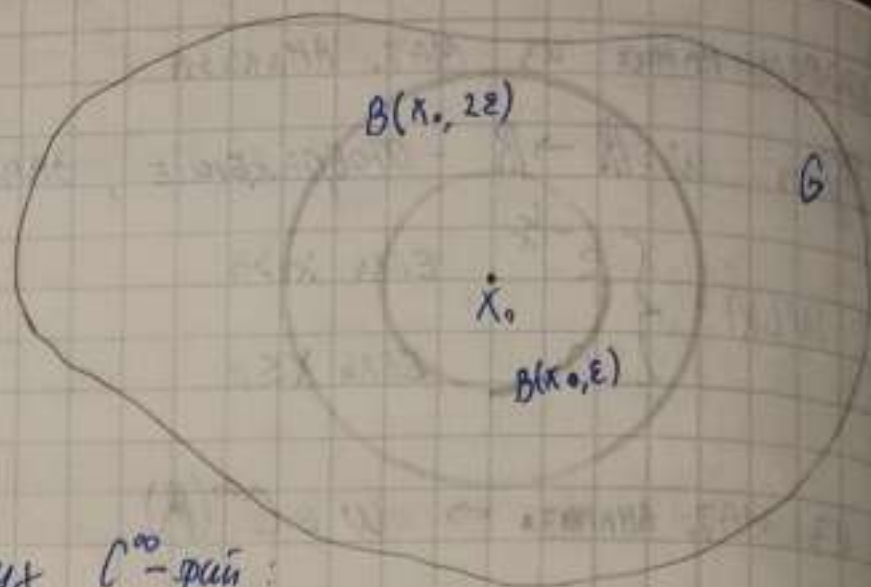


Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in G$,

$B(x_0, 2\varepsilon) \subset G$. Задан ф-ию

$w_{x_0, \varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$w_{x_0, \varepsilon}(x) = w(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$$



$w_{x_0, \varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ как суперпозиция двух C^∞ -фий:

w и многочлена $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2$

$\text{supp } w_{x_0, \varepsilon} \subset \subset B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, 2\varepsilon) \subset G$, т.е. носитель является ограниченным мн-вом, содержащимся в G .

Следовательно, $w_{x_0, \varepsilon}$ - пробная ф-ия.

Поскольку $x_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ произвольны (или во многом произвольны), то ф-ий

$w_{x_0, \varepsilon}$ очень много.

Замечание. Если φ_1 и φ_2 - пробные ф-ии в G , то $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-ия $a\varphi_1 + b\varphi_2$ явл. пробной в G , т.е. совокупность всех пробных ф-ий в G образует линейное пр-во. Его обозначают $\mathcal{D}(G)$

Опр Говорят, что пробные ф-ии $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots : G \rightarrow \mathbb{C}$ сходятся к пробной ф-ии $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$, если

1) $\forall \alpha$ - мульти. $\mathcal{D}^{\alpha} \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{D}^{\alpha} \varphi$ в G , т.е. если

$$\sup_{x \in G} |\mathcal{D}^{\alpha} \varphi_k(x) - \mathcal{D}^{\alpha} \varphi(x)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$$

2) $\exists$ ограниченное замкнутое мн-во $M \in G$ такое, что $\forall k$ $\text{supp } \varphi_k \subset M$.

Обознач. $\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(G)$ или $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ в $\mathcal{D}(G)$

4.2 Пространство обобщенных функций. Примеры обобщенных функций.

Опр Всякое отображение в мн-во чисел (вещественных или комплексных) называют функционалом.

Обознач. Если $F: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ - функционал, то его значение на пробной ф-ции φ будем обозначать через $F(\varphi)$ или (F, φ)

Опр Функционал $F: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся линейным, если $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(G)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $F(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha F(\varphi_1) + \beta F(\varphi_2)$

Опр Функционал $F: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся непрерывным, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ и любой последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_k, \dots$ ф-ций из $\mathcal{D}(G)$ из того, что $\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(G)$ следует, что $F(\varphi_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(\varphi)$

Замечание. (Эвристическое соображение): Если линейный ф-ал определен на любой ф-ции из $\mathcal{D}(G)$ и задан явной ф-лой, то он непрерывен.

Опр Линейный непрерывный функционал $F: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся обобщенной функцией в $G \subset \mathbb{R}^n$

Обознач $\mathcal{D}'(G)$ - совокупность всех обобщенных функций в $G \subset \mathbb{R}^n$

Примеры обобщенных ф-ий

(i) Регулярная обобщенная функция

Опр (из мат. анализа). Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$ и $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

Говорят, что f принадлежит пр-ву $L_1, \text{loc}(G)$, если $\forall x_0 \in G$

$\exists \varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0: \int_{G \cap B(x_0, \varepsilon)} |f(x)| dx < +\infty$. Другими словами:

$f \in L_1, \text{loc}(G) \Leftrightarrow f$ локально абсолютно интегрируема.

Примеры: (i) $f(x) \equiv 1 \in L_1, \text{loc}(\mathbb{R})$, но $f \notin L_1(\mathbb{R})$

(ii) $f(x) = \ln x \in L_1, \text{loc}(0, +\infty)$, но $f \notin L_1(\mathbb{R})$

Опр Для каждой ф-ии $f: G \rightarrow \mathbb{C} \in L_1$, $\text{loc}(G)$ построим обобщенную ф-ию $\{f\}$

по следующему правилу:

$$(\{f\}, \varphi) = \int_G f(x) \varphi(x) dx \quad (*)$$

Докажем, что интеграл $(*)$ с.х.-ся $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$:

I шаг φ -пробная ф-ия $\Rightarrow \text{supp } \varphi$ - огранич. замкнутое мн-во в $\mathbb{R}^n$.

Такие мн-ва называются компактными. Из мат. анализа известна теорема Вейерштрасса „всякая непрерывная ф-ия на компакте достигает своего максимального значения“. Поэтому

$$\sup_{x \in G} |\varphi(x)| = \sup_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi(x)| = |\varphi(x_0)| < +\infty, \text{ где } x_0 \in \text{supp } \varphi \subset G$$

Другими словами: $\exists C = \text{const} < +\infty$ такая, что $|\varphi(x)| \leq C \quad \forall x \in G$

II шаг Теперь используем другое важное св-во компактного мн-ва: „из всякого открытого покрытия компактного мн-ва можно выделить конечное подпокрытие.“ Мы знаем, что $\forall x_0 \in \text{supp } \varphi \quad \exists \varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0: \int_{G \cap B(x_0, \varepsilon(x_0))} |f(x)| dx < +\infty$

Очевидно, объединением шаров $B(x_0, \varepsilon(x_0))$ является открытым покрытием мн-ва $\text{supp } \varphi$: $\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{x_0 \in \text{supp } \varphi} B(x_0, \varepsilon(x_0))$

Значит из него можно выбрать конечное подпокрытие:

$$\{B(x_j, \varepsilon(x_j))\}_{j=1, \dots, k} \text{ такое, что } \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon(x_j)) \supset \text{supp } \varphi$$

III шаг Убедимся, что интеграл $(*)$ с.х.-ся абсолютно:

$$\int_G |f(x)| \varphi(x) dx \leq C \int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| dx \leq C \int_{\bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon(x_j))} |f(x)| dx \leq C \sum_{j=1}^k \int_{B(x_j, \varepsilon(x_j))} |f(x)| dx < +\infty$$

Замечание. В принципе, используя подобные рассуждения и предложение 1 о предельном переходе под знаком интеграла, можно док-ть, что формула $(*)$ задает непрерывный функционал. Однако мы этого делать не будем, а сошлёмся на наши „эвристические“ рассуждения.

В итоге функционал $(\{f\}, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx$ является линейным непрерывным функционалом, т.е. обобщенной ф-ой. Она и наз-ся регулярной обобщенной ф-ей.

(2) Дельта-функция Дирака: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$

• Докажем линейность: $\delta(a\varphi_1 + b\varphi_2) = (a\varphi_1 + b\varphi_2)(0) = a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0) = a\delta(\varphi_1) + b\delta(\varphi_2)$

• Докажем непрерывность: Пусть $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т.е.

$\forall \alpha$ -мульти. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{D}^\alpha \varphi_k(x) - \mathcal{D}^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0$ Тогда

$$|\delta(\varphi_k) - \delta(\varphi)| = |\delta(\varphi_k - \varphi)| = |(\varphi_k - \varphi)(0)| = |\varphi_k(0) - \varphi(0)| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ Значит } \delta(\varphi_k) - \delta(\varphi) \rightarrow 0 \text{ что и означ. непрерывн.}$$

Замечание δ -функция не является регулярной обобщенной функцией.

т.е. не сущ. „обычной“ ф-ии $\Delta(x) \in L_1 \text{ loc}(\mathbb{R})$ такой, что $\delta(x) = \int \Delta(x) \varphi(x) dx$,

т.е. такой, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполняется равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x) \varphi(x) dx = (\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

(δ -функция-сингулярная)

$$(3) \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$

Замечание $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ не является регулярной обобщенной ф-ей!

Единич. символ ф-ии

$$(4) \left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

Замечание $\frac{1}{x \pm i0}$ не является регулярной обобщенной ф-ей.

4.3 Формулы Сохоцкого

ТЕОРЕМА (формулы Сохоцкого):

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$$

Док-во

Пусть φ -пробная ф-ия. Тогда $\exists 0 < R < +\infty$: (выбрал интервал содержащий нуль)

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| > R$ имеем $\varphi(x) = 0$. Поэтому

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{I_1} + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{dx}{x \pm i\varepsilon}}_{I_2}$$

Предел интеграла I_1 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_1 = \int_{-R}^R \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right] dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \stackrel{(*)}{=} \int_{-R-a}^{R+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx =$$

$$= \int_{-R-a}^{-R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_R^{R+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \quad (\equiv)$$

Получается, что мы интегрируем нечеткую ф-ию $\frac{\varphi(x)}{x}$ по мн-ву $(-R-a, -R) \cup (R, R+a)$, симметричную относительно нуля, значит, сумма этих двух интегралов равна нулю и равенство $(*)$ доказано.

$$\equiv \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-R-a}^{R+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right)$$

$$\text{Обоснуем переход: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_1 = \int_{-R}^R \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right] dx$$

Для этого достаточно указать интегрируемую мажоранту для ф-ии

$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}$ в интервале $(-R, R)$, т.е. такую ф-ию $\psi(x)$, что

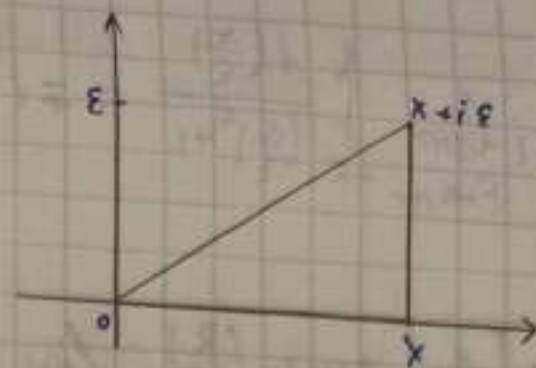
$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leq \psi(x) \quad \forall x \in (-R, R) \quad \text{и} \quad \int_{-R}^R \psi(x) dx < +\infty$$

Поскольку катет меньше гипотенузы, то $|x| < |x \pm i\varepsilon| \quad \forall x \neq 0 \text{ и } \forall \varepsilon > 0$

Значит, $|\frac{1}{x \pm i\varepsilon}| < |\frac{1}{x}|$

Следовательно,

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \stackrel{(**)}{\leq} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \quad \forall x \neq 0 \text{ и } \forall \varepsilon > 0$$



Положим
$$\psi(x) = \begin{cases} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right|, & \text{если } x \neq 0 \\ |\varphi'(0)|, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Из нер-ва (**) следует, что $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \stackrel{(***)}{\leq} \psi(x) \quad \forall x \neq 0 \text{ и } \forall \varepsilon > 0$

Если бы при $x=0$ имело место противоположное неравенство " $\geq$ ", то, ввиду непрерывности обеих функций $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right|$ и $\psi(x)$, нер-во " $\geq$ " имело бы место и для всех x , достаточно близких к нулю (но не равных нулю).

Это противоречило бы уже доказанному нер-ву (***)

Значит, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется нер-во $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leq \psi(x)$, т.е.

$\psi(x)$ является мажорантой для ф-ции $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right|$

С другой стороны, $\psi: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная ф-ция. А всякая непрерывная ф-ция интегрируема по любому конечному промежутку. Следовательно,

$$\int_{-R}^R \psi(x) dx < +\infty$$

Значит, ψ является интегрируемой мажорантой для ф-ции $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right|$

Значит переход обоснован.

Вычислим предел интеграла I_2 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{dx}{x \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{(x \pm i\varepsilon) dx}{x^2 \pm \varepsilon^2} \quad \textcircled{=}$$

умножим числитель и знаменатель на $x \mp i\varepsilon$

$$\textcircled{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{x dx}{x^2 \pm \varepsilon^2} \mp \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{\varepsilon dx}{x^2 \pm \varepsilon^2} =$$

нечетн ф-ция по пром.

разделим числитель и знаменатель на ε^2

симметричному относительно нуля

$$= \pm i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \frac{d(\frac{x}{\varepsilon})}{(\frac{x}{\varepsilon})^2 + 1} = \pm i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctg(\frac{x}{\varepsilon}) \Big|_{x=-R}^{x=R} =$$

$$= \pm i \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctg(\frac{R}{\varepsilon}) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctg(-\frac{R}{\varepsilon}) \right] = \pm i\pi$$



Возвращаемся к первым строкам блок-ва:

$$(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) = \dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1 + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_2 =$$

$$= (\mathcal{P}_x^1, \varphi) \mp i\pi \varphi(0) = (\mathcal{P}_x^1, \varphi) \mp i\pi (\delta(x), \varphi(x)) = (\mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}_x^1, \varphi(x))$$

определение δ -ф-ции

Но если две подчёркнутые ф-ции действуют на любую пробную ф-цию φ одинаково, то они равны. ЧТД.

Лекция 13. 30.11.2020

4.4 Сходимость обобщённых функций. Дельта-образные последовательности

Наводящее соображение:

Пусть G -область в $\mathbb{R}^n$;

$f, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ - ф-ии $G \rightarrow \mathbb{C}$, лежащие в $L_1, \text{loc}(G)$;

Пусть $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$

Тогда

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$(\{f_k\}, \varphi) = \int_G f_k(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_G f(x) \varphi(x) dx = (\{f\}, \varphi)$$

Опр Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ $F, F_1, F_2, \dots, F_k, \dots \in \mathcal{D}'(G)$. Говорят, что ф-ии F_k сходятся к $F \in \mathcal{D}'(G)$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ $(F_k, \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (F, \varphi)$

Обознач: $F_k \rightarrow F$ в $\mathcal{D}'(G)$ или $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$ в $\mathcal{D}'(G)$

Пример: Из определения обозн. ф-ии $\frac{1}{x \pm i0}$ имеем

$$\left\{ \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \rightarrow 0+} \rightarrow \frac{1}{x \pm i0}$$

Опр Говорят, что последовательность ф-ии $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ определённых в $\mathbb{R}^n$ и принимающих значения в $\mathbb{R}$, является δ -образной последовательностью, если

$$1) \forall k \quad h_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

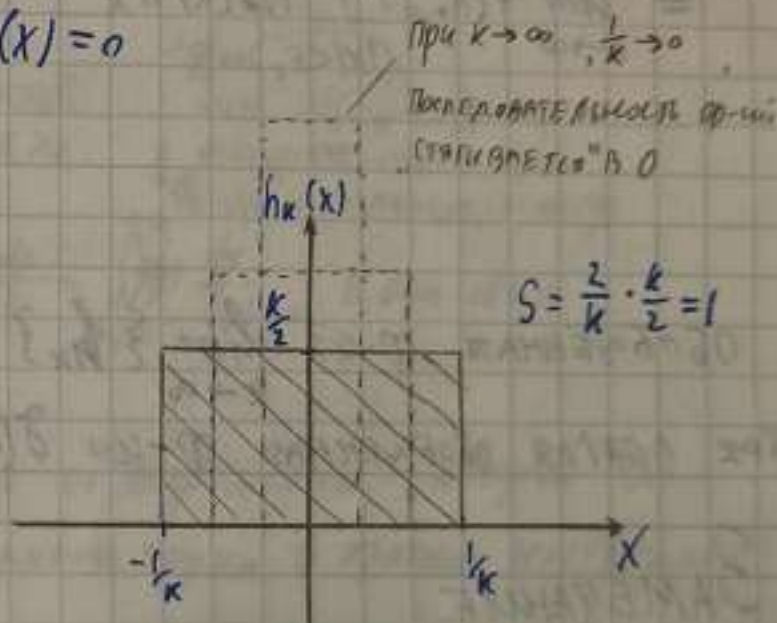
$$2) \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx = 1 \quad \forall k$$

$$3) \forall k \exists \varepsilon_k > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n: |x| \geq \varepsilon_k \quad h_k(x) = 0$$

• Пример 1: $n=1$

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{если } |x| < \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k}$$



• Пример 2 $n \geq 1$

$$h_k(x) = \frac{\omega_{n-1,k}(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{n-1,k}(y) dy}, \quad \varepsilon_k = \frac{1}{k}$$

Напоминание из мат. анализа: Вторая теорема о среднем

Пусть B - шар в $\mathbb{R}^n$; $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывн.; $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ - неотрицат.

$$\text{Тогда } \exists x_0 \in B: \int_B f(x) g(x) dx = f(x_0) \int_B g(x) dx$$

Замечание. В этой теореме нельзя отказаться от того что f - непрерывн. и от того что $g(x) \geq 0$

Если g принимает значения разных знаков, то может оказаться, что

$$\int_B g(x) dx = 0, \text{ а } \int_B f(x) g(x) dx \neq 0$$

Например: $n=1$ $B=(-\pi, \pi)$, $f(x)=g(x)=\sin(x)$

ТЕОРЕМА (о скорости δ -образной последовательности)

Пусть $n \geq 1$ $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ - δ -образная последовательность в $\mathbb{R}^n$.

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \{h_k\} = \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(G)$

Док-во

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

опред. (x_k) в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{h_k\}, \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} (\{h_k\}, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| < \varepsilon_k} h_k(x) \varphi(x) dx$$

$h_k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 $|x| \geq \varepsilon_k$, причем $\varepsilon_k \rightarrow 0$

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА
О СРЕДНЕМ

$\exists x_{0,k} \in \mathbb{R}^n$: $|x_{0,k}| < \varepsilon_k$

т.к. φ - НЕ ПРЕРЫВНАЯ

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{0,k}) \int_{|x| < \varepsilon_k} h_k(x) dx = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{0,k}) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

опр. δ -ф-ии

раз $h_k(x) = 0$ вне этого шара, можно вернуться к интегрированию по $\mathbb{R}^n$

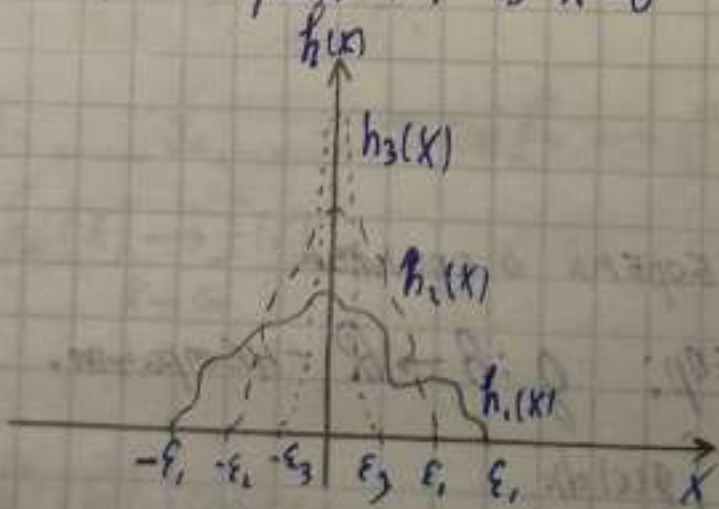
ТОГДА ИНТЕГРАЛ РАВЕН 1. $\forall k$

т.к. $|x_{0,k}| < \varepsilon_k$, а $\varepsilon_k \rightarrow 0$

ОБОБЩЕННАЯ Ф-ЦИЯ $\lim_{k \rightarrow \infty} \{h_k\}$ ДЕЙСТВУЕТ НА ЛЮБУЮ ПРОБНУЮ Ф-ЦИЮ ТАКЖЕ, КАК ДРУГАЯ ОБОБЩЕННАЯ Ф-ЦИЯ $\delta(x)$. ЗНАЧИТ ЭТИ ОБОБЩЕННЫЕ Ф-ЦИИ РАВНЫ. ■

ЗАМЕЧАНИЕ.

ЭТА ТЕОРЕМА ПОЗВОЛЯЕТ ДАТЬ ВОТ ТАКУЮ "ФИЗИЧЕСКУЮ" ИНТЕРПРЕТАЦИЮ δ -Ф-ЦИИ: δ -Ф-ЦИЯ ЕСТЬ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО МАССУ 1 И СОСРЕДОТОЧ. В $x=0$



ЗАМЕЧАНИЕ В АНГЛОЯЗЫЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЕ "ОБОБЩЕННАЯ Ф-ЦИЯ" $\equiv$ distribution, т.е. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

4.5 ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОБОБЩЁННОЙ ФУНКЦИИ

НАВОДЯЩЕЕ СООБРАЖЕНИЕ

Пусть $n \geq 1$, $f \in L_1, \text{loc}(\mathbb{R}^n)$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - нм. невырожденное преобразование
 $b \in \mathbb{R}^n$

Тогда $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (f(Ax+b), \varphi(x)) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(A^{-1}(y-b)) \frac{dy}{|\det A|} = \\ &= (f(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}) \end{aligned}$$

ЗАМЕНА
 $y = Ax + b, dy = |\det A| dx$

Из мат. анализа (почему при $n=1$ оп-ла замены переменной в кратком интеграле тоже работает)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(ax+b) dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{dy}{a}, & \text{если } a > 0 \\ \int_{+\infty}^{-\infty} g(y) \frac{dy}{a} = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{dy}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{dy}{|a|}, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$y = ax + b$
 $dy = a dx$

$$\textcircled{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{dy}{|a|} - \text{это в точности то выражение, которое нам даёт оп-ла замены перемен. в кратком интеграле.}$$

Опр Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - невырожденное нм. отображение, $b \in \mathbb{R}^n$
 $(F(Ax+b), \varphi(x)) = (F(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|})$

Пример 1:

$\delta(-x) = \delta(x)$, в самом деле ($x \in \mathbb{R}^n$):

$$(\delta(-x), \varphi(x)) \textcircled{=} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad Ax = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\det A = (-1)^n \quad |\det A| = 1, \quad b = 0$$

$$\textcircled{=} (\delta(y), \frac{\varphi(-y)}{1}) = (\delta(y), \psi(y)) = \psi(0) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)) \quad \text{Итого}$$

↑
 Полагая $\psi(y) = \varphi(-y)$

Пример 2 (сдвигута δ -ф-ия) $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) \equiv$$

$$Ax=x, \text{ значит } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = E = A^{-1}, \det A = 1$$

$$\delta = -x_0$$

$$\equiv (\delta(y), \varphi(y+x_0)) = \varphi(x_0)$$

НЕЛИНЕЙНУЮ ЗАМЕНУ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗУЧИМ ТОЛЬКО ДЛЯ ОДИМЕРНОЙ δ -Ф-ИИ

НАВОДЯЩЕЕ СООБРАЖЕНИЕ: (ОНО ЖЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ)

Пусть $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - "ОБЫЧНАЯ" Ф-ИИ И $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ - δ -ОБРАЗНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Символом $\delta(\alpha(x))$ ОБОЗНАЧАЮТ ОБОБЩЕННУЮ Ф-ИИ, КОТОРАЯ ДЕЙСТВУЕТ НА ЛЮБУЮ ПРОБНУЮ Ф-ИИ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ПО ПРАВИЛУ

$$(\delta(\alpha(x)), \varphi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k(\alpha(x)), \varphi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\alpha(x)) \varphi(x) dx$$

ТЕОРЕМА (ФОРМУЛА НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ОДИМЕРНОЙ δ -Ф-ИИ)

Пусть $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ И ИМЕЕТ ТОЛЬКО ПРОСТЫЕ (НЕ КРАТНЫЕ) КОРНИ $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ (Т.Е. $\alpha(x_k) = 0$, НО $\alpha'(x_k) \neq 0$)

ТОГДА

$$\delta(\alpha(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|\alpha'(x_k)|}$$

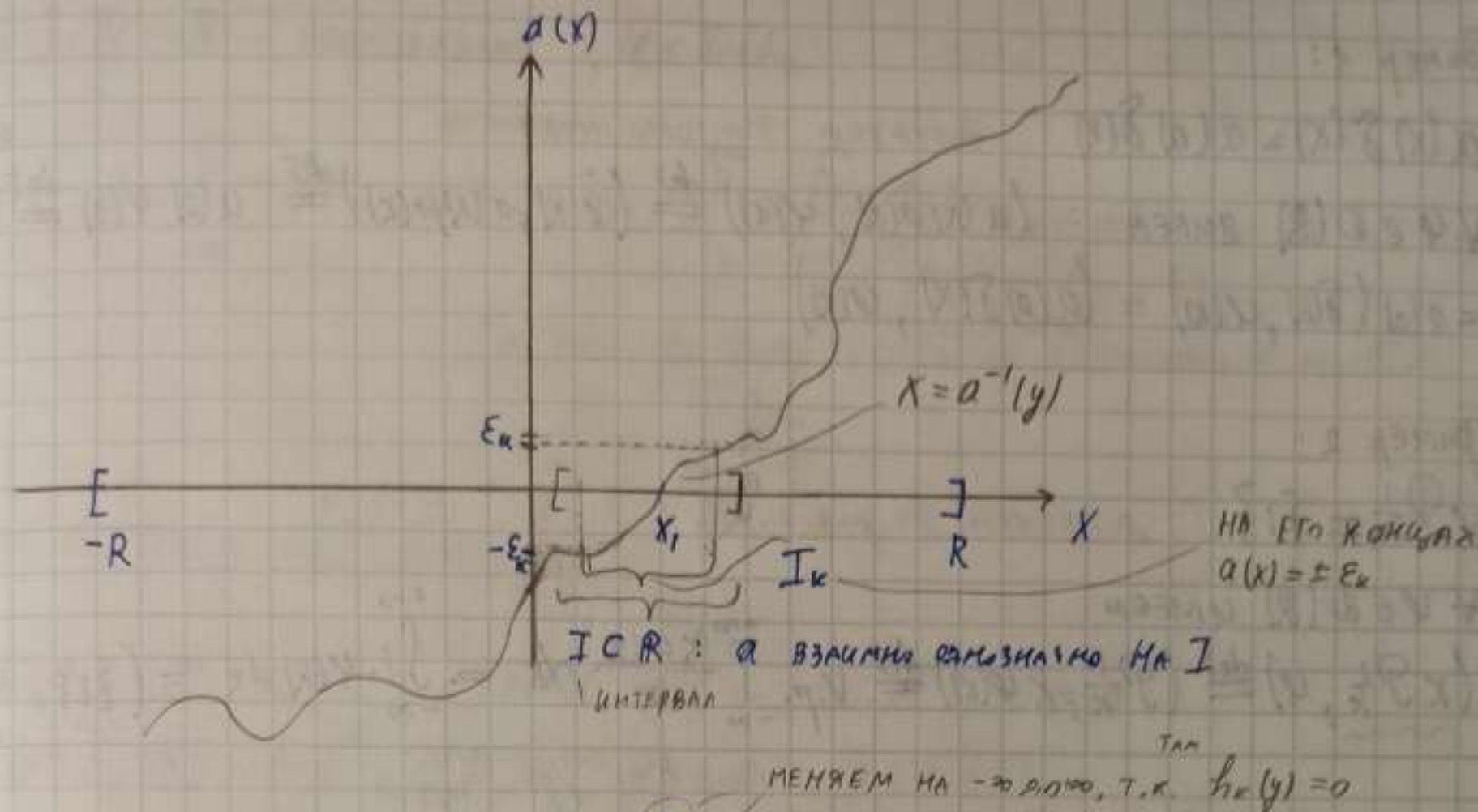
ДОК-ВО (РАССМОТРИМ СЛУЧАЙ, КОГДА КОРНИ ВСЕГО $\alpha(x)$ ИИ.)

ФИКСИРУЕМ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

ТОГДА ПУСТЬ $R > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x| > R \Rightarrow \varphi(x) = 0$

ТОГДА $(\delta(\alpha(x)), \varphi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\alpha(x)) \varphi(x) dx \equiv$ где h_k - δ -ОБРАЗНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

И $\varepsilon_k > 0: h_k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq \varepsilon_k$, ПРИЧЕМ $\varepsilon_k \rightarrow 0$



$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} h_k(a(x)) \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon_k}^{\epsilon_k} h_k(y) \varphi(a^{-1}(y)) \frac{dy}{|a'(a^{-1}(y))|} =$$

т.к. $\forall x \notin I_k |a(x)| \geq \epsilon_k$,
а значит $h_k(a(x)) = 0$

замена
 $y = a(x)$, $dy = |a'(x)| dx$

$$= \left(\delta(y), \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|} \right) = \frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|} = \left(\underbrace{\delta(x - x_k)}_{\text{дир. дельта}}, \varphi(x) \right) \quad \text{чт.д.}$$

Лекция 14. 7.12.2020

4.6 Умножение обобщенных функций

Наводящие соображения

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_1 \text{loc}(G)$, $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ — бесконечно диф-ма.

Тогда

$$(\{a f\}, \varphi) = \int_G a(x) f(x) \varphi(x) dx = (\{f\}, a \varphi)$$

Дпр Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$ и пусть $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ — беск. диф-ма.

Тогда aF обозн. новую обобщенную ф-ию, которая на любую пробную ф-ию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ действует по ф-ле: $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$

Пример 1:

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x) \quad \text{ДОКАЖЕМ ЭТО РАВЕНСТВО}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ ИМЕЕМ: } (a(x)\delta(x), \varphi(x)) \stackrel{\text{пр.1}}{=} (\delta(x), a(x)\varphi(x)) \stackrel{\text{пр.1}}{=} a(0)\varphi(0) \stackrel{\text{пр.1}}{=} a(0)(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$$

Пример 2:

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = \{1\} \quad \text{ДОКАЖЕМ ЭТО РАВЕНСТВО}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ИМЕЕМ

$$(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) \stackrel{\text{пр.1}}{=} (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)) \stackrel{\text{пр.1}}{=} \text{в.р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = (\{1\}, \varphi(x))$$

РАЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК
НЕТ, В.Р. НЕ НУЖНО

Замечание

Нельзя определить операцию умножения любых обобщённых ф-ий, так чтобы она обладала тремя естественными свойствами:

- 1) коммутативность
- 2) ассоциативность
- 3) совпадает с операциями умножения на беск. диф-ные ф-ии, которые мы уже ввели.

• Пример: вычислим $(x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x}$, приняв, что (1), (2), (3) - выполняются:

$$(x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} \stackrel{\text{пр.1}}{=} 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 0,$$

С другой стороны

$$(x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} \stackrel{\text{пр.1}}{=} (\delta(x)x)\mathcal{P}\frac{1}{x} \stackrel{\text{пр.2}}{=} \delta(x)(x\mathcal{P}\frac{1}{x}) \stackrel{\text{пр.3}}{=} \delta(x)$$

Но $0 \neq \delta(x)$, значит мы пришли к противоречию.

4.7 Дифференцирование обобщённых ф-ий. ТЕОРЕМА О СВЯЗИ КЛАССИЧЕСКОЙ И ОБОБЩЁННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ.

Наводящие соображения:

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Тогда

$$(\{f'\}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{по частям}}{=} \underbrace{f(x) \varphi(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \varphi(x) = 0, \text{ т.к. при } x > \text{некоторого } R \quad \varphi(x) \equiv 0$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(\{f\}, \varphi')$$

Опр Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$ и любой мулт., $G \subset \mathbb{R}^n$ - область

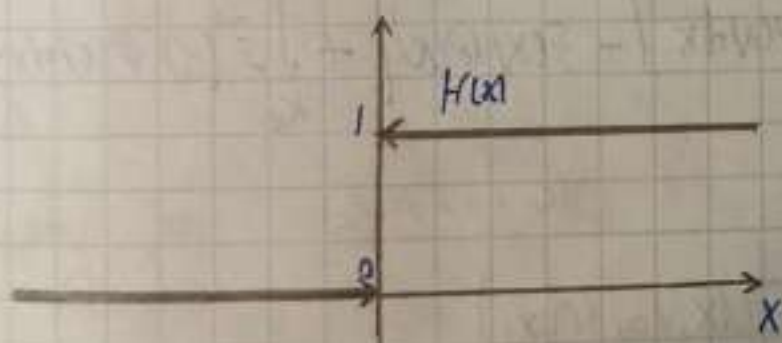
$$(\mathcal{D}^k F, \varphi) = (-1)^{|k|} (F, \mathcal{D}^k \varphi) \text{ при любой } \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

Пример 1:

$$(\delta'(x), \varphi(x)) \stackrel{\text{деф}}{=} -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$$

Пример 2:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad - \text{ ф-ция Хевисайда (Единичная ступенька)}$$



$$(\{H(x)\}', \varphi(x)) \stackrel{\text{деф}}{=} -(\{H(x)\}, \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \stackrel{\text{по оп-ре Ньютона-Лейбница}}{=} \\ = -\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} = -\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right] = \varphi(0) \stackrel{\text{деф}}{=} (\delta(x), \varphi(x)), \text{ значит}$$

$$\{H(x)\}' = \delta(x)$$

Напоминание: $f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$ - предел ф-ции f в точке x (справа),

$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$ - предел ф-ции f в точке x слева

$[f]_x = f(x+0) - f(x-0)$ - скачок ф-ции f в точке x

ТЕОРЕМА (о связи классической и обобщенной производной кусочно-гладкой ф-ции)

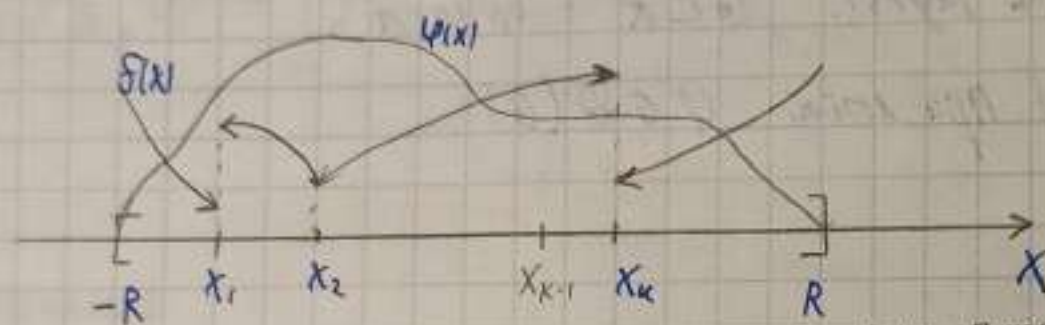
Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - кус.-гл. ф-ция. и пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ - все точки, в которых f имеет изломы или разрывы. Тогда

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$$

Док-во

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists R > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x| > R \Rightarrow \varphi(x) = 0$

на $[-R, R]$ $\exists$ конечное число точек $x_1, \dots, x_k$



$$(\{f\}', \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} -(\{f\}, \varphi') \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx =$$

$$= \int_{-R}^{x_1} f(x) \varphi'(x) dx - \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_k}^R f(x) \varphi'(x) dx =$$

$$= - \underbrace{f(x) \varphi(x)}_{-R} \Big|_{-R}^{x_1} + \int_{-R}^{x_1} f'(x) \varphi(x) dx - \sum_{j=1}^{k-1} \left[\underbrace{f(x) \varphi(x)}_{x_j} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x) \varphi(x) dx \right] - \underbrace{f(x) \varphi(x)}_{x_k} \Big|_{x_k}^R + \int_{x_k}^R f'(x) \varphi(x) dx$$

$\lim_{x \rightarrow x_{j+1}-0} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow x_j+0} f(x) \varphi(x)$
 $f(x_{j+1}-0) \varphi(x_{j+1}) - f(x_j+0) \varphi(x_j)$

$$= \sum_{j=1}^k [f(x_{j+0}) - f(x_{j-0})] \varphi(x_j) + \int_{-R}^R f'(x) \varphi(x) dx =$$

$$= (\{f'\}, \varphi) + \sum_{j=1}^k [f]_{x_j} (\delta(x - x_j), \varphi)$$

Ч.Т.Д.

Пример (производная δ ф-ции как плотности распределения заряда в эл. диполе)



$p = el$ - дипольный момент

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ p = \varepsilon l = \text{const}}} [\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l)], \varphi(x) \stackrel{\text{т.с.}}{=} \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ p = \varepsilon l = \text{const}}} (\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l), \varphi(x)) =$$

$$= \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ p = \varepsilon l = \text{const}}} \frac{[\varepsilon \varphi(0) - \varepsilon \varphi(l)]}{l} = -p \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{l-0} = -p \varphi'(0) = (p \delta'(x), \varphi(x))$$

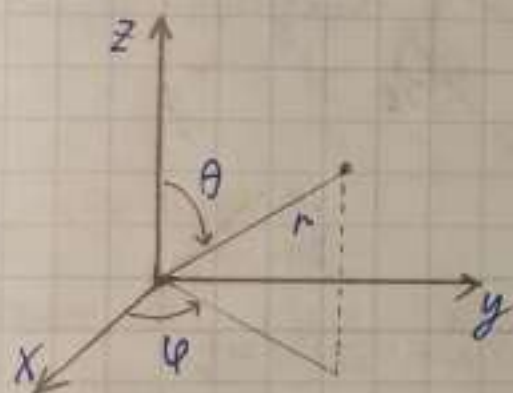
ОТВЕТ $p \delta'(x)$ - ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛ. ДИПОЛЕ С ДИП. МОМ. p .

4.8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА.

ИЗ МАТ. АНАЛИЗА:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \text{ - ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В } \mathbb{R}^n$$

При $n=3$ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

ФОРМУЛА ГРИНА

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS, \text{ где } u, v: V \rightarrow \mathbb{R};$$

V - орг. обл. в $\mathbb{R}^3$ с глад. Гран. S : n - ЕДИНИЧНЫЙ ВЕКТОР ВНЕШНЕЙ НОРМАЛИ К S ;

$\frac{\partial u}{\partial n}$ - ПРОИЗВОДНАЯ В НАПРАВЛЕНИИ ЕДИНИЧНОГО ВЕКТОРА n , Т.Е. $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u) \cdot \vec{n}$

ЗАДАЧА:

Пусть $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$

НАЙТИ Δu

Шаг I. (в классическом смысле $r \neq 0$)

$r \neq 0$, тогда

$$K. \quad \Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \underbrace{\frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial r}}_{-r^{-2}} \right) = 0$$

Шаг II (в смысле обобщенных функций)

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ - пробная ф-ция

$$(\Delta f, \varphi) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \varphi \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \varphi \right) \stackrel{\text{доп}}{=}$$

$$= (-1)^2 (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}) + (-1)^2 (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) + (-1)^2 (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}) = (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}) = (f, \Delta \varphi)$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \Delta \varphi(x, y, z) dx dy dz =$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon < r < R}$ ЗАМЕНЯЕМ

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{\varepsilon < r < R} (f(x, y, z) \Delta \varphi(x, y, z) - \Delta f \cdot \varphi) dx dy dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{\varepsilon < r < R} \begin{vmatrix} \Delta \varphi & \Delta f \\ \varphi & f \end{vmatrix} dx dy dz \stackrel{\text{Ф. ЛА ГРИНА}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \varphi & f \end{vmatrix} dS =$$



НА КООРДЕ $r = \varepsilon$
 $\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial r} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

$r = \varepsilon$, т.е. по ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ, УСИЛЕНА $= 0$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\iint_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS}_{I_1} + \underbrace{\iint_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi dS}_{I_2} \right]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \iint_{r=\varepsilon} \nabla \varphi \cdot \vec{n} dS \leq$$

$$\varphi \in C^\infty \rightarrow \exists C = \text{const} : |\nabla \varphi| \leq C$$

$$|\nabla \varphi \cdot \vec{n}| \leq |\nabla \varphi| \cdot |\vec{n}| \leq C \cdot 1$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \cdot C \iint_{r=\varepsilon} dS = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} \varphi ds \stackrel{\text{ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О ГРАДИЕНТЕ}}{=} \exists X_\varepsilon: |X_\varepsilon| = \varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(X_\varepsilon) \iint_{r=\varepsilon} ds \stackrel{\text{ЧБС}^2}{=} \stackrel{\text{ГР. Ф. НЕПР}}{=} 4\pi \varphi\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon\right) = 4\pi \cdot \varphi(0) = (4\pi \delta(x), \varphi(x))$$

ОТВЕТ $\Delta f = 4\pi \delta$ где-то потерял минус

Опр Пусть $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ - лин. дифр. оператор с коэф. $a_\alpha(x) \in C^\infty$

Обобщенная ф-ция E наз-ся фундам. решением диф-го оператора L .

$$\text{Если } LE = \delta(x)$$

Пример

$$E = -\frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ является фундам. реш. трехмерного оператора Лапласа}$$

Лекция 15.

14.12.2020

4.9 СВЁРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Наводящее соображение:

$$\text{Пусть } f, g \text{ - б-у ф-ции } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ и } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ ТОГДА}$$

$$(f * g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{КОММУТАТ. СВЕРТКИ Б-У Ф-ЦИ}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x) \varphi(x) dx =$$

$$\stackrel{\text{ИЗМ. ПОРЯДОК ИНТ}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy \right] \varphi(x) dx \stackrel{\text{ЗАМЕНА } z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \varphi(x) dx \right] dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(z) \varphi(y+z) dz \right] dy = (f(y), (g(z), \varphi(y+z)))$$

Опр Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тогда их свёрткой $F * G$ мы называем новую обобщённую ф-ию $F * G$, которая действует на любых ф-ии φ по

правилу:

$$(F * G, \varphi) = (F(y), (G(z), \varphi(y+z)))$$

Замечание Это определение явл. корректным, если ф-ии $y \mapsto (G(z), \varphi(y+z))$ является пробной. Но даже если эта ф-ия не является пробной свёртка $F * G$ может быть задана ф-ией из опр. для некоторых F .

Свойства свёртки:

$$1) \forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$F * \delta = F$$

Док-во

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$(F * \delta, \varphi) = (F(y), (\underbrace{\delta(z), \varphi(y+z)}_{\varphi(y)})) = (F(y), \varphi(y)) \quad \text{что,}$$

$$2) \forall F_1, F_2, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ и } \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

$$(a_1 F_1 + a_2 F_2) * G = a_1 (F_1 * G) + a_2 (F_2 * G)$$

Док-во

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned} ((a_1 F_1 + a_2 F_2) * G, \varphi) &= (a_1 F_1(y) + a_2 F_2(y), (G(z), \varphi(y+z))) = \\ &= a_1 (F_1(y), (G(z), \varphi(y+z))) + a_2 (F_2(y), (G(z), \varphi(y+z))) = \\ &= a_1 (F_1 * G, \varphi) + a_2 (F_2 * G, \varphi) = (a_1 (F_1 * G) + a_2 (F_2 * G), \varphi) \end{aligned}$$

$$3) F * G = G * F$$

Без док-ва (т.к. док-во довольно сложно (нужно понятие тензорного произведения))

$$4) \text{ Дифференцирование свёртки}$$

$$\forall \alpha\text{-мульти}, \forall F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{D}^*(F * G) = (\mathcal{D}^* F) * G = F * (\mathcal{D}^* G)$$

Д, ок-во

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Производная по любым переменным, берём по z

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^*(F * G), \varphi) &= (-1)^{|K|} (F * G, \mathcal{D}^* \varphi) = (-1)^{|K|} (F(y), (G(z), \mathcal{D}_z^* \varphi(y+z))) = \\ &= (F * (\mathcal{D}^* G), \varphi) \quad (\text{второе равенство доказывается аналогично воспользовавшись коммут.}) \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Свертка обобщённых ф-ий не ассоциативна, т.е. равенство $(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$ выполняется не всегда

Пример:

$$F_1 = \{1\}$$

$$F_2 = \delta'$$

$$F_3 = \{H(x)\}$$

Тогда

ТЕОРЕМА СВЯЗИ КЛАССИЧ. И ОБОБЩ. ФУНКЦИЙ

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_k [f]_k \delta(x - x_k)$$

$$F_1 * F_2 = \{1\} * \delta' \stackrel{(*)}{=} (\{1\} * \delta)' = \{1\}' = \{0\} = 0$$

$$F_1 * F_2 * F_3 = 0 * \{H(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$$

$$F_2 * F_3 = \delta'(x) * \{H(x)\} \stackrel{(*)}{=} (\delta(x) * \{H(x)\})' = \{H(x)\}' = \delta(x)$$

$$F_1 * (F_2 * F_3) = \{1\} * \delta(x) \stackrel{(**)}{=} 1$$

$$0 \neq 1 \Rightarrow (F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3)$$

4.10 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ. ТЕОРЕМА О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННОГО Д.У.

НАПОМИНАНИЕ ИЗ 4.8:

Опр. $L(x) = \sum_{|H| \leq k} a_H(x) \mathcal{D}^H$ - линейный диф-ый оператор порядка k с C^∞ -коэф $a_H(x)$

Опр. Обобщённая ф-ия E наз-ся фундаментальным решением оператора L , если

$$LE = \delta$$

Пример:

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{4\pi r} \text{ — является фундамент. реш. трехмер. оператора}$$

Лапласа

Оператор Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Примеры классических уравнений мат. физики

$$\Delta u = f \text{ (ур-е Пуассона, при } f=0 \text{ — ур-е Лапласа)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ (ур-е теплопроводности)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ (волновое ур-е)}$$

Теорема (о применении фундаментального решения)

Пусть $L = \sum_{|k| \leq k} a_k \partial^k$ — лин. диф. оператор. Сост. котор. a_k и E — его

фундаментальное решение.

Тогда

$$F_1 = E * F_2 \text{ является решением д.у. } LF = F_2$$

Док-во

$$LF_1 = \sum_{|k| \leq k} a_k \partial^k (E * F_2) \stackrel{(1)}{=} \sum_{|k| \leq k} a_k (\partial^k E) * F_2 \stackrel{(2) \text{ лемма}}{=} \left(\sum_{|k| \leq k} a_k \partial^k E \right) * F_2 = \delta * F_2 = F_2$$

$LE = \delta$

Теорема (о нахождении ор. ф. обычн. диф. оператора)

Пусть $L = \sum_{j=0}^k a_{k-j}(x) \frac{d^j}{dx^j}$, где $a_{k-j}(x) \in C^\infty$ причем $a_0(x) \neq 0$

Пусть $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^k решение д.у. $LF_0 = 0$, удовлетвор. начальным условиям

$$f_0(0) = f_0'(0) = \dots = f_0^{(k-2)}(0) = 0 \text{ и } f_0^{(k-1)}(0) = 1. \text{ Тогда}$$

$$E = \text{н.к. } f_0(x) \text{ — фундамент. решение оператора } L, \text{ т.е. } LE = \delta$$

Док-во

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$$

Тогда

$$E = \{ \text{н.к. } f_0(x) \}$$

детер

$$E' = \{H(x) f_0'(x)\} + 0$$

$$E'' = \{H(x) f_0''(x)\} + 0$$

$$E^{(k-1)} = \{H(x) f_0^{(k-1)}(x)\} + 0$$

$$E^{(k)} = \{H(x) f_0^{(k)}(x)\} + \delta(x)$$

$$|a_k(x)$$

$$|a_{k-1}(x)$$

$$\dots$$

$$|a_1(x)$$

$$|a_0(x)$$

Складываем

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\underbrace{[H(x) f_0^{(k-1)}(x)] \delta(x)}_1$$

$$\sum_{j=0}^k a_j E^{(k-j)} = \{H(x) \sum_{j=0}^k a_j f_0^{(k-j)}(x)\} + \delta(x) = \delta(x)$$

$$\parallel$$

$$LE$$

$$LE = \delta(x)$$

ч.т.д.

Лекция 16 21.12.2020

4.11 Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

$$F_1 = F_2$$

ч.т.д.

Наводящие соображения

Пусть f -б.у. ф-ция в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ и φ -пробная ф-ция в $\mathbb{R}^n$ (т.е. φ -тоже б.у.)

$$\text{Тогда } \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\pm i(k,y)} dx$$

$$(\{\mathcal{F}_\pm[f(x)](y)\}, \varphi(y)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \varphi(y) dy \Leftrightarrow$$

$$\exists \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ - б.у. ф-ция : } \varphi(y) = \mathcal{F}_\pm[\psi(x)](y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{\varphi}(y) = \mathcal{F}_\pm[\psi(x)](y)$$

Поредействуем на обе части равенства $\mathcal{F}_\mp$. Тогда

$$\mathcal{F}_\mp[\bar{\varphi}(y)](x) = \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \overline{\mathcal{F}_\pm[\psi(x)](y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi(x)} dx = \left\langle \begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \mathcal{F}_\mp[\bar{\varphi}(y)](x) = \\ &= \mathcal{F}_\pm[\varphi(y)](x) \end{aligned} \right\rangle =$$

Равенство Парсеваля
для б.у. ф-ции

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{F}_\pm[\varphi(y)](x) dx = (\{f(x)\}, \tilde{F}_\pm[\varphi(y)](x))$$

Опр Пусть F - обобщ. ф-ция в $\mathbb{R}^n$. Тогда её преобр. Фурье $\tilde{F}_\pm[F]$ наз-т новой обобщ. ф-цией, которая действует на любых пробных ф-циях φ по правилу

$$(\tilde{F}_\pm[F], \varphi) = (F, \tilde{F}_\pm[\varphi])$$

Пример.

$$(\tilde{F}_\pm[\delta], \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\delta, \tilde{F}_\pm[\varphi]) = \tilde{F}_\pm[\varphi(x)](0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\tilde{F}_\pm(x, 0)} dx =$$

$$= (\{2\pi\}^{-\frac{n}{2}}, \varphi) \Rightarrow$$

$$\tilde{F}_\pm[\delta] = \{ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \}$$

Вопрос

Для каких $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ будет $\tilde{F}_\pm[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$?

Ответ

Такая φ всего одна: $\varphi \equiv 0$ (из теоремы Котельникова - Шеннона 2.10 стр. 40 (без док-ва))

Что делать?

Изменить класс пробных ф-ций.

Опр Теперь пробной ф-ей будем называть быстро убывающие функции т.е. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Опр Обобщённой ф-ей медленного роста наз-ся лин. непрерыв. функ-ция на $S(\mathbb{R}^n)$

Обозначим мн-во обобщённых ф-ций медленного роста через $S'(\mathbb{R}^n)$

Замечание

Нужно заочно определить все понятия для обобщённых ф-ций медленного роста: предел, замена переменных, дифференцирование, умножение, свёртка, ...

Но это делается аналогично.

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ Ф-ИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА.

Пусть $F, G \in S'(\mathbb{R}^n)$, $a, b \in \mathbb{C}$, α - мульт.

Тогда:

1) ЛИНЕЙНОСТЬ: $\mathcal{F}_\pm [aF + bG] = a\mathcal{F}_\pm [F] + b\mathcal{F}_\pm [G]$

2) $\mathcal{F}_\pm [X^\alpha F(X)] = (\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{F}_\pm [F])$, где $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$,
 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

3) $\mathcal{F}_\pm [\mathcal{D}^\alpha [F(X)](y)] = (\pm iy)^\alpha \mathcal{F}_\pm [F(X)](y)$

4) $\mathcal{F}_\pm : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ причём это отображение "на"

5) $\mathcal{F}_\pm [\mathcal{F}_\mp [F]] = F$ - формула обращения

6) $\mathcal{F}_\pm [F * G] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}_\pm [F] \cdot \mathcal{F}_\pm [G]$

7) $\mathcal{F}_\pm [F \cdot G] = (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm [F]) * (\mathcal{F}_\pm [G])$

ДОК-ВА.

1) Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{F}_\pm [aF + bG], \varphi) \stackrel{\text{д.з.}}{=} (aF + bG, \mathcal{F}_\pm [\varphi]) = a(F, \mathcal{F}_\pm [\varphi]) + b(G, \mathcal{F}_\pm [\varphi]) \stackrel{\text{д.з.}}{=} \\ = a(\mathcal{F}_\pm [F], \varphi) + b(\mathcal{F}_\pm [G], \varphi) = (a\mathcal{F}_\pm [F] + b\mathcal{F}_\pm [G], \varphi)$$

2) Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ Тогда

$$(\mathcal{F}_\pm [X^\alpha F(X)], \varphi) \stackrel{\text{д.з.}}{=} (X^\alpha F(X), \mathcal{F}_\pm [\varphi(y)](x)) \stackrel{\text{опр. умножения}}{=} (F(X), X^\alpha \mathcal{F}_\pm [\varphi(y)](x)) \stackrel{\text{опр.}}{=} \\ \text{умножим числитель и знаменатель на } (\pm i)^{|\alpha|} \cdot (\mp i)^{|\alpha|}$$

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} = ((\pm i X_1)^{\alpha_1} \dots (\pm i X_n)^{\alpha_n}) \cdot \frac{1}{(\pm i)^{\alpha_1} \dots (\pm i)^{\alpha_n}} =$$

$$= (\pm i X)^{\alpha} (\mp i)^{|\alpha|}$$

(3) для б-й ф-лы

$$\stackrel{\text{опр.}}{=} (F(X), (\mp i)^{|\alpha|} (\pm i X)^{\alpha} \mathcal{F}_\pm [\varphi(y)](x)) \stackrel{\text{опр.}}{=} (\mp i)^{|\alpha|} (F(X), \mathcal{F}_\pm [\mathcal{D}^\alpha \varphi(y)](x)) \stackrel{\text{опр.}}{=} \\ \text{опр. произв}$$

$$= (\mp i)^{|\alpha|} (\mathcal{F}_\pm [F(X)](y), \mathcal{D}^\alpha \varphi(y)) \stackrel{\text{опр. произв}}{=} (\mp i)^{|\alpha|} ((-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{F}_\pm [F(X)](y)), \varphi(y)) =$$

$$= ((\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{F}_\pm [F(X)](y)), \varphi(y))$$

Упр. Док-ва св-во 3.

Замечание.

В октябре на лекциях св-ва преобраз. Фурье доказывались через б.у. ф-ции.
А на семинарах применялись не только для б.у. ф-ций. Ейча видно, что
это применение было экзотичным. Мы вывели преобр. Фурье от регулярных
обобщённых ф-ций.