7.10 Оператор, сопряжённый к ограниченному

<u>Опр.</u> Пусть H, H_1 – гильбертовы пр-ва; $A : H \to H_1$ – линейн. ограниченный оператор. Фиксируем $x_0 \in H_1$ и построим функционал $f : H \to \mathbb{C}$ по формуле

$$f(x) = (Ax, x_0) \qquad \forall x \in H.$$

Этот ф-ал линеен (что очевидно) и непрерывен

(т.к. $$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x_0)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\| \cdot \|x_0\|}{\|x\|} = \|x_0\| \cdot \|A\| < +\infty)$$

нер-во Коши-Буняковского

Из т-мы Рисса $\Rightarrow \exists!\ x_1 \in H : f(x) = (x, x_1)\ \forall x \in H$.
Тем самым возникло отображение $H_1 \to H$, которое каждому $x_0 \in H_1$ сопоставляет $x_1 \in H$.
Будем обозначать это отображение через $A^* : H_1 \to H$.
и называть <u>оператором, сопряжённым</u> к A.
При этом имеем $(Ax, x_0) = f(x) = (x, A^* x_0)$.

<u>Другими словами</u>: Если опустить обоснование, то $A^* : H_1 \to H$ – это оператор, задаваемый равенством $(Ax, x_0) = (x, A^* x_0)$, справедливым $\forall x \in H$ и $\forall x_0 \in H_1$.

При изучении св-в сопряжённого оператора часто бывает полезна следующая мини-лемма:

<u>Мини-лемма</u>: Если H - гильбертово пр-во и вектора $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H$ выполняется равенство $(x,z) = (y,z)$, то $x = y$

Д-во: $(x,z) = (y,z) \iff (x,z) - (y,z) = 0 \iff (x-y, z) = 0$

Поскольку любое из этих равенств справедливо $\forall z \in H$, то можем подставить $z = x - y$ в последнее равенство: $(x-y, x-y) = 0 \iff x - y = 0$,

т.е. $x = y$. ЧТД.

~~...~~ аксиома скалярного произведения

<u>Замечание</u>: мини-лемма позволяет устанавливать равенство векторов „безкоординатным" способом.

<u>Св-ва оператора, сопряжённого к ограниченному</u> (здесь H, H_1, H_2 - гильб. пр-ва; $A: H \to H_1$, $B: H \to H_1$, $C: H_1 \to H_2$ - ограниченные операторы; α, β - числа):

(1) A^* явл. линейным ограниченным оператором, причём $\|A^*\| \le \|A\|$.

Д-во: Пусть $x \in H$. Фиксируем $y_1, y_2 \in H_1$. Тогда

$$(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) \overset{\text{опр}}{=} (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$= \bar{\alpha}(Ax, y_1) + \bar{\beta}(Ax, y_2) \overset{\text{опр}}{=} \bar{\alpha}(x, A^* y_1) + \bar{\beta}(x, A^* y_2) =$$

$= \underline{(x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2)}$.

Т.к. равенство ~~...~~ справедливо $\forall x \in H$, то по лемме-лемме $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2$ $\forall y_1, y_2 \in H_1$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа. Значит, A^* - линеен. Теперь оценим норму оператора A^*:

$$|(x, A^* y)| \overset{\text{опр}}{=} |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

нер-во Коши-Буняковского

св-во операторной нормы

Подставив сюда $x = A^* y$, получим

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) \leq \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|.$$

Следовательно,

$$\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \cancel{\|y\|}}{\cancel{\|y\|}} = \|A\| \quad \text{ЧТД}.$$

(2) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$.

Д-во: Пусть $x \in H$ и $y \in H_1$ - произвольные вектора. Тогда ~~$(x, A^*$~~ $(x, \underline{(\alpha A + \beta B)^* y}) \overset{\text{опр}}{=}$

$= ((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) =$

$= \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y) =$

$= (x, \underline{\bar{\alpha} A^* y + \bar{\beta} B^* y})$. По лемме-лемме подчеркнутые вектора равны друг-другу:

$(\alpha A + \beta B)^* y = (\bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*) y \quad \forall y \in H_1$

Значит $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$. ЧТД

(3) $(A^*)^* = A$.

Д-во. Сначала отметим, что если $A: H \to H$, то $A^*: H_1 \to H$ и $(A^*)^*: H \to H_1$. Для любых $x \in H_1$ и $y \in H$ имеем $(x, (A^*)^* y) \overset{\text{опр}}{=}$
$= (A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} \overset{\text{опр}}{=} \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$

Из этого по мини-лемме получаем $(A^*)^* y = Ay \quad \forall y \in H$. Значит, $(A^*)^* = A$. ЧТД.

(4) $\|A^*\| = \|A\|$.

Д-во: $\|A^*\| \overset{(1)}{\leq} \|A\| \overset{(3)}{=} \|(A^*)^*\| \overset{(1)}{\leq} \|A^*\|$. Значит, $\|A^*\| = \|A\|$. ЧТД

(5) Если $I: H \to H$ — тождественный оператор, то $I^* = I$.

Д-во: $\forall x, y \in H$ имеем $(x, I^* y) \overset{\text{опр}}{=} (Ix, y) =$
$= (x, y) = (x, Iy). \Rightarrow I^* y = Iy \quad \forall y \in H \Rightarrow I^* = I$ ЧТД.

(6) $(CA)^* = A^* C^*$, где $A: H \to H_1$, $C: H_1 \to H_2$.

Д-во: $(x, (CA)^* y) \overset{\text{опр}}{=} ((CA)x, y) = (C(Ax), y) \overset{\text{опр}}{=}$
$= (Ax, C^* y) \overset{\text{опр}}{=} (x, A^*(C^* y)) = (x, (A^* C^*) y) \Rightarrow$
$(CA)^* y = (A^* C^*) y \quad \forall y \Rightarrow (CA)^* = A^* C^*$. ЧТД

<u>Замечание.</u> Св-ва (1)-(6) известны вам из линейной алгебры. Мы убедились, что они

справедливы не только для конечномерных операторов.

Из семинаров вы знаете, что точечный спектр найти проще всего, а остаточный — сложнее всего. Следующая теорема сводит эту „сложную" задачу к „простой", но для сопряжённого оператора.

<u>Т-ма</u> (о применении сопряжённого оператора к нахождению остаточного спектра оператора) (без док-ва): Пусть H, H_1 — гильбертовы пр-ва, $A : H \to H_1$ — линейный ограниченный оператор и $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

(1) $\lambda \in \sigma_r(A)$;

(2) $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.