

Лекция 14

7.6 Теорема Неймана

Т-ма (фок Нейман). Пусть H -гильбертово пр-во,
 $A: H \rightarrow H$ - линейный ограниченный оператор такой, что
 $\|A\| < 1$ и $\text{dom } A = H$. Тогда оператор $I-A$ обратим,
 $(I-A)^{-1}$ ограничен, $\text{dom } (I-A)^{-1} = H$ и

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где $A^0 = I_H$, $A^{n+1} = A A^n \quad \forall n \geq 0$.

Д-во опирается на неравенство $\|A^n\| = \|A \cdot A^{n-1}\| \leq$
 $\leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \|A\|^2 \cdot \|A^{n-2}\| \leq \dots$

деление тоже
смысл

Нормы произведения
операторов не превосхо-
дит произведения их
норм

$$\dots \leq \|A\|^n \cdot \|A^0\| = \|A\|^n \xrightarrow{\text{т.к. } \|A\| < 1} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит: (а) $A^n \rightarrow 0$, т.к. $\|A^n\| \leq \|A\|^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$
 и определенность сходимости операторов.

(б) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится, т.к. сходится числовой ряд
 $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$ и св-ва 2 п. 7.4.

Следовательно,

$$(I-A) \sum_{n=0}^N A^n = \sum_{n=0}^N A^n - \sum_{n=0}^N A^{n+1} = I - A^{N+1}$$

$$\downarrow N \rightarrow +\infty \qquad \qquad \qquad \downarrow N \rightarrow +\infty$$

$$(I-A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n \qquad \qquad \qquad I$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right) (I-A) = I.$$

Значит, по св-ву 4 п. 7.5 оператор $I-A$ обратим, тогда $(I-A)^{-1} = H$, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$,

$$\|(I-A)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty.$$

Замечание Теорема Гейнса утверждает, что в УТД
матричную формулу для суммы бесконечной
прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

можно подставить оператор A , если $\|A\| < 1$.