

7.7) Спектр оператора

Пусть $A: H \rightarrow H$ - линейный ограниченный оператор.
Рассмотрим $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y \quad \text{или} \quad (A - \lambda I)x = y$$

при разных $y \in H$. Рассмотрим 4 случая, которые при этом могут встретиться:

- (1) $\nexists (A - \lambda I)^{-1}$;
- (2) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$, причем $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} = H$;
- (3) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$, причем $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} \neq H$, но $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] = H$;
- (4) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$, причем $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] \neq H$.

Рассмотрим эти случаи подробнее:

- ① В этом случае $\exists x \neq 0: Ax - \lambda x = 0$. При этом (как и в линейной алгебре) число λ называется собственным значением оператора A , а вектор $x \neq 0$ такой, что $Ax = \lambda x$, называется собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению λ . Совокупность всех собственных ~~векторов~~ значений оператора A называется точечным спектром и обозначается через $\sigma_p(A)$, "p" от слова "point".

- ② В этом случае говорят, что λ является регулярным значением оператора A . Множ-во всех регулярных значений оператора A обозначают через $\rho(A)$ и называют резольвентным множ-вом оператора A . Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ называют резольвентными
операторами, поскольку они разрешают (resolve)
 ур-ние $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x = R_\lambda y = (A - \lambda I)^{-1}y$.
 Оказывается, для $\lambda \in \rho(A)$ оператор R_λ авто-
 сопряженный линейный ограниченный. Это следует
 из Теоремы Банаха об обратном операторе,
 которую мы выведем без док-ва: Если H, H_1 -
 Hilbertовы пр-ва, $B: H \rightarrow H_1$ - линейный ограни-
 ченный обратимый оператор, причём $\text{dom } B^{-1} = H_1$,
 то оператор B^{-1} является ограниченным.

Опр: для $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется спектр
 оператора A

③ В этом случае говорят, что λ принадлежит
непрерывному спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_c(A)$,
 "с" от слова "continuous".

④ В этом случае говорят, что λ принадлежит
 остаточному спектру оператора A и пишут
 $\lambda \in \sigma_r(A)$, "r" от слова "residual".

Замечание: в линейной алгебре ^{Спектр} мы называли совокупность
 всех собственных чисел; т.е. в линейной алгебре спектром
 мы называли точечный спектр (другими словами,
 в линейной алгебре $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$).

Простейшие св-ва спектра:

(1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \emptyset$.

(2) Спектр оператора A содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$ с центром в нуле, т.е.
 $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}.$

(3) Спектр является замкнутой мн-вом.

Св-во (1) непосредственно следует из определений.

Докажем св-во (2): Оно эквивалентно тому, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$|\lambda| > \|A\|$ имеем $\lambda \notin \sigma(A)$. Последнее следует из

вычисления $(A - \lambda I)^{-1} = \left[-\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)\right]^{-1} =$

$= \left[(-\lambda I) \left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)\right]^{-1} = \left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)^{-1} \left(-\frac{1}{\lambda} I\right) \leftarrow \text{обратим и}$
 $\text{его } \text{dom}() = H$
 $\downarrow$
 $\lambda \in \sigma(A).$
 УД.

обратим,
и $\text{dom}(-\lambda I)^{-1} = H$

обратим и $\text{dom}(I - \frac{1}{\lambda} A)^{-1} = H$
по т-еме Неймана, т.к.

$$\left\| \frac{1}{\lambda} A \right\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1.$$

Св-во (3) следует из доказанного аналогично
св-ву (2) (т.е. с помощью теоремы Неймана),
но это пока делать не будем.