

7.8 Линейные функционалы. Теорема Рисса об
общем виде линейного функционала Сопряжённое
ур-во.

Опр. Линейным функционалом называется линейный
оператор, действующий у множестве ур-ва H в множество
чисел (т.е. в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Пример: $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт
линейный ф-ал $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). $\nwarrow$ Скалярное
произведение.

Замечание: Основным функционалом является оператором,
то есть у нас ^{линейный} ^{непрерывный} ^{непрерывный} ур-во функционала: Нормы,
ограниченность, ^{непрерывность} ^{непрерывность} сходимость, ... Но есть ещё одна понятие,
которое раньше нам не встречалось:

Опр явл-во $\{x \in H : f(x) = 0\}$ называется ядром
функционала f и обозначается через $\ker f$

Св-ва линейных функционалов:

(1) $\forall f: H \rightarrow \mathbb{C}$ $\ker f$ является линейным подпр-вом в H .

(2) Если f непрерывен, то $\ker f$ замкнут.

(3) Если f - непрерывный непрерыв. линей. ф-ал, то $\dim(\ker f) \stackrel{!}{=} 1$.

(4) $\forall x_0 \in H$ ф-ал $f(x) = (x, x_0)$ задаёт
линейный непрерыв. ф-ал, причём $\|f\| = \|x_0\|$.

(5) $\forall$ линейного непрерывного ф-ала
 $f: H \rightarrow \mathbb{C} \exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0) \forall x \in H$;
при этом $\|f\| = \|x_0\|$.

Теорема Рисса
об общем виде
линейного
непрерывного
ф-ала

Докажем некоторые из этих свойств.

① Если $x, y \in \ker f$; то $f(x) = f(y) = 0$. Значит,
 $\forall \alpha, \beta$ -мисе $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$,
 т.е. $\alpha x + \beta y \in \ker f$. УТД.

② Если $x_n \in \ker f \forall n$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, то в силу
 непрерывности г-ае f имеем $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Значит $x_0 \in \ker f$. Другими
 словами, $\ker f$ - замкнуто. УТД.

④ $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, x_0)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|x_0\| =$
 $= \|x_0\|.$
 ↑
 не-во Коши-
 Бунзковского

Чтобы оценить норму f снизу, будем рассуждать
 для случая: $x_0 = 0$ и $x_0 \neq 0$:

$(x_0 = 0)$ $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, \overset{0}{\underset{\|0\|}{x_0}})| = 0 = \|\overset{0}{\underset{\|0\|}{x_0}}\|.$

$(x_0 \neq 0)$ $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, x_0)| \geq$
 $\geq \left| \left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0 \right) \right| = \frac{|(x_0, x_0)|}{\|x_0\|} = \|x_0\|.$
 ↑
 подставим $x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$

Тем самым мы доказали, что $\|x_0\| \leq \|f\| \leq \|x_0\|$,
 а значит, $\|f\| = \|x_0\|$. УТД.

Опр. Мно-во всех непрерывных линейных функ-
 ционалов, определенных на H , называется сопряженным
 к H пр-вом и обозначается H^* .