(4.3) Формулы Сохоцкого

<u>Т-ма</u> (Формула Сохоцкого): $\dfrac{1}{x\pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

<u>Д-во</u>: Пусть φ — пробная функция. Тогда $\exists\; 0<R<+\infty$: $\forall x\in\mathbb{R}: |x|>R$ имеем $\varphi(x)=0$. Поэтому

$$\left(\frac{1}{x\pm i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x\pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}dx}_{=I_1} + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0+}\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x\pm i\varepsilon}}_{I_2}.$$

<u>Вычислим предел интеграла I_1:</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} I_1 \overset{?}{=} \int_{-R}^{R}\left[\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}\right]dx = \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \overset{(*)}{=}$$

$$\underset{\forall a>0}{=} \int_{-R-a}^{R+a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = \int_{-R-a}^{-R}\frac{\overset{\to 0}{\varphi(x)}-\varphi(0)}{x}dx + \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx +$$

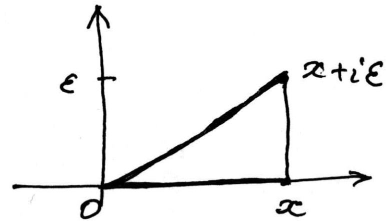
$$+\int_{R}^{R+a}\frac{\overset{\to 0}{\varphi(x)}-\varphi(0)}{x}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-R-a}^{R+a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right).$$

Получается, что мы интегрируем нечётную ф-цию $\dfrac{\varphi(0)}{x}$ по мн-ву $(-R-a,-R)\cup(R,R+a)$, симметричному относительно нуля. Значит, сумма этих двух интегралов равна нулю и равенство $(*)$ доказано.

<u>Обсудим переход (?) к пределу под знаком интеграла:</u>

Для этого достаточно указать интегрируемую мажоранту для ф-ции $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}$ в интервале $(-R,R)$, т.е такую ф-цию $\psi(x)$, что $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}\right| \le \psi(x)\quad \forall x\in(-R,R)$ и $\displaystyle\int_{-R}^{R}\psi(x)\,dx < +\infty$.

Поскольку катет меньше гипотенузы, то $|x| < |x \pm i\varepsilon|$ $\forall x \neq 0$ и $\forall \varepsilon > 0$



Значит, $\left|\dfrac{1}{x \pm i\varepsilon}\right| < \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

Следовательно, $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right| \overset{(**)}{<} \left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|$ $\forall x \neq 0$ и $\forall \varepsilon > 0$.

Положим
$$\psi(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|, & \text{если } x \neq 0 \\ |\varphi'(0)|, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

~~Т.к.~~ Из нер-ва (**) следует, что $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right| \overset{(***)}{<} \psi(x)$ $\forall x \neq 0$ и $\forall \varepsilon > 0$

Если бы при $x = 0$ имело место противоположное неравенство „$>$", то, ввиду непрерывности обеих функций $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right|$ и $\psi(x)$, нер-во „$>$" имело бы место и для всех x, достаточно близких к нулю (но не равных нулю). Это противоречило бы уже доказанному нер-ву (***).

Значит, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется нер-во

$\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right| \le \psi(x)$, т.е. $\psi(x)$ является мажорантой для ф-ии $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right|$.

С другой стороны, $\psi : [-R, R] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. А всякая непрерывная ф-ия интегрируема по любому конечному промежутку. Следовательно, $\int\limits_{-R}^{R} \psi(x)\,dx < +\infty$.

Значит, ψ является интегрируемой мажорантой для ф-ии $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}\right|$ чем и завершается обоснование перехода (?) к пределу под знаком интеграла при вычислении $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} I_1$.

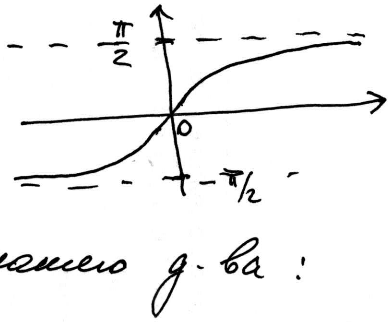
Вычисление предела интеграла I_2:

$$\lim_{\varepsilon\to0+} I_2 = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x\pm i\varepsilon} \;\overset{\text{умножим числитель и знаменатель на } x\mp i\varepsilon}{=}\; \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{(x\mp i\varepsilon)\,dx}{x^2+\varepsilon^2} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{x\,dx}{x^2+\varepsilon^2}}_{\text{Это интеграл от нечётной ф-ции по промежутку, симметричному относительно нуля. Он равен } 0.} \mp i\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\underbrace{\frac{\varepsilon\,dx}{x^2+\varepsilon^2}}_{\text{разделим числитель и знаменатель на } \varepsilon^2} =$$

$$= \mp i\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\underbrace{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1}_{\text{Первообразной этой ф-ции является арктангенс}}} = \mp i\lim_{\varepsilon\to0+}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Bigg|_{x=-R}^{x=+R} =$$

$$= \mp i\left[\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0+}\operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to0+}\operatorname{arctg}\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right)}_{=-\frac{\pi}{2}}\right] = \mp i\pi.$$



Теперь возвращаемся к первым строкам нашего д-ва:

$$\left(\frac{1}{x\pm i\varepsilon},\varphi\right) = \ldots = \lim_{\varepsilon\to0+} I_1 + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to0+} I_2 =$$

$$= \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right) \mp i\pi\varphi(0) \;\overset{\text{определение } \delta \text{ ф-ции}}{=}\; \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right) \mp i\pi\left(\delta(x),\varphi(x)\right) = \left(\mp i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

Но если две обобщённые ф-ции одинаково действуют на любую пробную ф-цию φ, то они равны. ЧТД.