**Список вопросов, включённых в экзаменационные билеты
по “Основам функционального анализа”.
Зимняя сессия: январь 2021 г.**

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Блиц-опрос состоит в том, что студенту нужно без подготовки сформулировать пять определений или теорем, указанных преподавателем, по темам, не вошедшим в два других вопроса билета. Эти два других вопроса билета являются теоретическими вопросами (в частности, они не содержат задач) из программы курса.

Ниже приведён список теоретических вопросов из программы курса, включённых в экзаменационные билеты в качестве второго и третьего вопросов. По сути это перечень всех разделов программы.

§1. Ряды Фурье

- 1.1. Понятие о ряде Фурье 2π -периодической функции и задача о разложении функции в ряд Фурье.
- 1.2. Ряд Фурье функции с произвольным периодом.
- 1.3. Разложение в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам.
- 1.4. Лемма Римана-Лебега для конечного промежутка: формулировка, объяснение «на пальцах», строгое доказательство для непрерывно дифференцируемых функций и идея доказательства в общем случае.
- 1.5. Ядро Дирихле: вывод формулы для ядра Дирихле и доказательство его свойств.
- 1.6. Теорема о представимости функции в точке её рядом Фурье: формулировка и доказательство.
- 1.7. Примеры разложения функции в ряд Фурье и суммирования числового ряда с помощью ряда Фурье.
- 1.8. Ряд Фурье в комплексной форме.
- 1.9. Разложение функции в комплексный и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов.
- 1.10. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.
- 1.11. Задача о наилучшем приближении и неравенство Бесселя.
- 1.12. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье: формулировка и доказательство.
- 1.13. Явление Гиббса (без доказательства).
- 1.14. Равенство Ляпунова (в том числе обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме): формулировка и доказательство.
- 1.15. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами: формулировки и идеи доказательства.

§2. Преобразование Фурье

- 2.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.
- 2.2. Теорема о представимости функции в точке её интегралом Фурье: формулировка и идея доказательства.
- 2.3. Представление функции на полупрямой её интегралом Фурье. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразование Фурье.
- 2.4. Примеры вычисления синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$ и представления этой функции её интегралом Фурье на полупрямой. Вычисление интегралов Лапласа.
- 2.5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Прямое и обратное преобразования Фурье. Формула обращения.
- 2.6. Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье: найти преобразование Фурье от функции $f(x) = e^{-ax^2}$.

- 2.7. Быстро убывающие функции: определения, примеры и свойства.
- 2.8. Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и свойства.
- 2.9. Равенство Парсеваля: формулировка и доказательство.
- 2.10. Дальнейшие свойства быстро убывающих функций: свёртка быстро убывающих функций (дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать формулу для преобразования Фурье от свёртки), формула Пуассона (без доказательства), теорема Котельникова-Шеннона (без доказательства).

§3. Преобразование Лапласа

- 3.1. Определение и простейшие свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема смещения и теорема о дифференцировании оригинала, теорема подобия – формулировки и доказательства.
- 3.2. Применение преобразования Лапласа для решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 3.3. Дальнейшие свойства преобразования Лапласа: аналитичность изображения (сформулировать и объяснить идею доказательства) и формула обращения (сформулировать и доказать). Свёртка оригиналов: определение, теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля – формулировки и доказательства.

§4. Обобщённые функции

- 4.1. Пространство основных функций: определение и примеры основных функций, сходимость основных функций.
- 4.2. Пространство обобщённых функций: определение обобщённой функции, примеры обобщённых функций.
- 4.3. Формулы Сохоцкого – формулировка и доказательство.
- 4.4. Сходимость обобщённых функций. Дельтаобразная последовательность. Формулировка и доказательство теоремы о пределе дельтаобразной последовательности. Плотность распределения массы тела, имеющего единичную массу, сосредоточенную в одной точке.
- 4.5. Замена переменной в обобщённой функции: линейная замена переменной для произвольной обобщённой функции (наводящие соображения, определение и примеры) и нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции. Формулировка и доказательство теоремы о нелинейной замене переменной в одномерной дельта-функции.
- 4.6. Умножение обобщённых функций: наводящие соображения, определение умножения на бесконечно дифференцируемую функцию, примеры вычисления произведений, а также пример, показывающий невозможность распространения операции умножения на произвольные обобщённые функции.
- 4.7. Дифференцирование обобщённых функций. Формулировка и доказательство теоремы о связи классической и обобщённой производных. Плотность распределения заряда электрического диполя.
- 4.8. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа. Определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора.
- 4.9. Свёртка обобщённых функций: определение и четыре свойства (коммутативность свёртки – без доказательства). Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.
- 4.10. Решение дифференциальных уравнений с помощью фундаментального решения. Теорема о нахождении фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора: формулировка и доказательство.
- 4.11. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать только формулу для вычисления преобразования Фурье от произведения обобщённой функции на моном.

Составил В.А. Александров
12 января 2021 г.