

Билеты по “Основам функционального анализа”.
Физический факультет НГУ. Зимняя сессия 2021 г.

Билет № 1

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Понятие о ряде Фурье 2π -периодической функции и задача о разложении функции в ряд Фурье. Лемма Римана-Лебега для конечного промежутка: формулировка, строгое доказательство для непрерывно дифференцируемых функций и идея доказательства в общем случае.
3. Сформулировать и доказать равенство Парсеваля для быстро убывающих функций.

Билет № 2

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Вывести формулу для ядра Дирихле и доказать его свойства.
3. Быстро убывающие функции: дать определение, а также сформулировать и доказать свойства быстро убывающих функций.

Билет № 3

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Ряд Фурье функции с произвольным периодом. Разложение в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами: формулировки и идеи доказательства.
3. Определение и простейшие свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема смещения и теорема о дифференцировании оригинала, теорема подобия – формулировки и доказательства.

Билет № 4

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Дать определение кусочно-гладкой функции. Привести примеры кусочно-гладких функций. Сформулировать и доказать теорему о представимости функции в точке её рядом Фурье.
3. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Свёртка оригиналов: определение, теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля – формулировки и доказательства.

Билет № 5

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Примеры разложения функции в ряд Фурье и суммирования числового ряда с помощью ряда Фурье. Задача о наилучшем приближении и неравенство Бесселя для тригонометрических рядов: сформулировать задачу о наилучшем приближении, сформулировать и доказать теорему о многочлене наилучшего приближения, сформулировать и доказать неравенство Бесселя.
3. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые: привести наводящие соображения, дать строгое определение, вычислить выражения $a(x)\delta(x)$ и $x P \frac{1}{x}$; объяснить, почему невозможно определить операцию умножения для произвольных обобщённых функций.

Билет № 6

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Ряд Фурье в комплексной форме: вывести соответствующую формулу исходя из вещественного тригонометрического ряда Фурье. Равенство Ляпунова: сформулировать равенство Ляпунова для интегрируемых функций и доказать его для непрерывно дифференцируемых функций; вывести обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме.
3. Линейная замена переменной для произвольной обобщённой функции: привести наводящие соображения, дать определение и привести примеры, в том числе доказать равенство $\delta(-x) = \delta(x)$. Дать определение нелинейной замены переменной в одномерной дельта-функции. Сформулировать теорему о нелинейной замене переменной в одномерной дельта-функции. Доказать эту теорему для случая одного корня.

Билет № 7

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Разложение функции в комплексный и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье: сформулировать и доказать соответствующие теоремы.
3. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье: воспроизвести и прокомментировать соответствующие наводящие соображения. Теорема о представимости функции в точке её интегралом Фурье (сформулировать без доказательства).

Билет № 8

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Равномерная сходимость рядов Фурье: сформулировать и доказать соответствующую теорему. Явление Гиббса: пояснить суть явления и схематично (т.е. без подробного исследования частичной суммы ряда Фурье на минимум и максимум) объяснить его для ступенчатой функции.
3. Сходимость обобщённых функций. Дельтаобразная последовательность. Формулировка и доказательство теоремы о пределе дельтаобразной последовательности. Плотность распределения массы тела, имеющего единичную массу, сосредоточенную в одной точке.

Билет № 9

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Представление интегралом Фурье функций, заданных на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье. Вычислить синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0, a > 0$. Используя полученные формулы вычислить интегралы Лапласа $\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy$ и $\int_0^{\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2} dy$.
3. Дифференцирование обобщённых функций: привести наводящие соображения, дать строгое определение и привести примеры. Сформулировать теорему о связи классической и обобщённой производной. Плотность распределения заряда электрического диполя.

Билет № 10

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Вывести комплексную форму интеграла Фурье. Дать определение прямого и обратного преобразования Фурье. Сформулировать формулу обращения. Объяснить почему её уже не нужно доказывать.
3. Вычислить фундаментальное решения трёхмерного оператора Лапласа. Дать определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора.

Билет № 11

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Вычислить прямое и обратное преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0$.
3. Пространство основных функций: дать определения носителя функции, пробной функции (привести примеры), сходимости основных функций. Сформулировать и доказать формулы Сохоцкого.

Билет № 12

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Преобразование Фурье от быстро убывающих функций: дать определение, а также сформулировать и доказать свойства.
3. Свёртка обобщённых функций: определение и четыре свойства (коммутативность свёртки – без доказательства). Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.

Билет № 13

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Дальнейшие свойства быстро убывающих функций: свёртка быстро убывающих функций (дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать формулу для преобразования Фурье от свёртки), формула Пуассона (без доказательства), теорема Котельникова-Шеннона (без доказательства).
3. Решение дифференциальных уравнений с помощью фундаментального решения. Теорема о нахождении фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора: формулировка и доказательство.

Билет № 14

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Дальнейшие свойства преобразования Лапласа: аналитичность изображения (сформулировать и объяснить идею доказательства) и формула обращения (сформулировать и доказать). Свёртка оригиналов: определение, теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля – формулировки и доказательства.
3. Пространство обобщённых функций: дать определение обобщённой функции и рассмотреть примеры – регулярные обобщённые функции, δ -функция и функции $P\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x \pm i0}$. Сформулировать и доказать формулы Сохоцкого.

Билет № 15

1. Сдача задач из заданий (если есть долги) и блиц-опрос.
2. Теорема о представимости функции в точке её рядом Фурье: формулировка и доказательство.
3. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать только формулу для вычисления преобразования Фурье от произведения обобщённой функции на моном.

Составил В.А. Александров
17 января 2021 г.
Исправил: 19.01.2021