ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

Программа курса лекций
(4-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Линейные пространства: определение, примеры, линейная зависимость (конечной или бесконечной) совокупности векторов, размерность пространства, пример бесконечномерного пространства, подпространство, примеры конечномерных и бесконечномерных подпространств.

5.2. Нормированные линейные пространства: определение нормы, определение и примеры нормированного пространства, сходимость последовательности векторов, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, плотное множество, примеры плотного и неплотного множества в $\mathbb{R}$. Открытый и замкнутый шар, открытое множество. Сепарабельное пространство. Примеры сепарабельных нормированных пространств. Пример незамкнутого подпространства в бесконечномерном нормированном пространстве. Фундаментальная последовательность, полнота пространства. Банаховы пространства. Примеры полных и неполных нормированных пространств. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$ как важнейший пример полных нормированных пространств: определение и свойства (без доказательств), в том числе — интегральные неравенства Гёльдера и Минковского, полнота и сепарабельность, плотность множества гладких функций.

5.3. Линейные пространства со скалярным произведением: определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского — Шварца в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство: определение и примеры.

5.4: Ортогональность векторов. Угол между векторами. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта.

5.5. Приближение векторами из данного подпространства и ортогональное проектирование на подпространство: Вектор наилучшего приближения. Лемма о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Лемма об эквивалентности понятий «вектор наилучшего приближения» и «ортогональная проекция вектора». Ортогональное дополнение к подпространству. Прямая сумма подпространств. Примеры разложения пространства в прямую сумму подпространств. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространств.

5.6. Проектирование на конечномерное подпространство и неравенство Бесселя: Теорема об ортогональном проектировании на конечномерное подпространство (теорема Пифагора). Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Ряд Фурье вектора из гильбертова пространства. Неравенство Бесселя.

. **5.7:** Пополнение ортонормированной системы. Полная ортонормированная система. Гильбертов базис. Замкнутая ортонормированная система. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве (без доказательства).

5.8: Теорема Рисса — Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств: определение. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств: формулировка и идея доказательства.

5.9. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Литература: основная — 2, 8; дополнительная — 6, 7 (глава III), 9 (глава 1).

6. Ортогональные многочлены

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: Определения весовой функции и весового лебеговского пространства. Идея построения ортогональных многочленов посредством ортогонализации последовательности мономов. Ортогональные многочлены: определение.

6.2. Общие свойства ортогональных многочленов, в том числе — однозначная определённость ортогональных многочленов их весом; чётность / нечётность многочлена с чётным весом; трёхчленная рекуррентная формула.

6.3. Свойства нулей ортогональных многочленов, в том числе — все нули простые и содержатся в промежутке ортогональности; два многочлена с последовательными номерами не могут иметь общего корня; нули многочленов перемежаются (последнее — без доказательства).

6.4. Классические ортогональные многочлены: Определения классических ортогональных многочленов. Стандартизация ортогональных многочленов. Примеры различных стандартизаций. Производящая функция: определение. Уравнение Пирсона. Обзор основных свойств классических ортогональных многочленов (без доказательства).

6.5. Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения.

6.6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности.

6.7. Многочлены Лежандра: Формула Родрига и теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра (для обеих — только идея доказательства).

6.8: Мультипольное разложение кулонова потенциала. Дипольный момент.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 4; дополнительная — 7 (глава VII, § 3).

7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы: определение, примеры и простейшие свойства.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы: определения и теорема об эквивалентности понятий непрерывного и ограниченного операторов.

7.3. Норма оператора: определение; лемма о трёх формулах, задающих норму опреатора; теорема о шести свойствах нормы оператора; оценка нормы оператора, отображающего конечномерное пространство в конечномерное.

7.4. Сходимость операторов и операторные ряды: определение сходящейся последовательности операторов, свойства сходящихся последовательностей операторов. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов (без доказательства). Определение операторного ряда и его суммы. Свойства сходящихся операторных рядов.

7.5. Обратимость оператора. Обратный оператор: определение обратимого оператора, образа оператора и обратного оператора. Свойства обратного оператора.

7.6. Теорема Неймана.

7.7. Спектр оператора. Определение собственного значения оператора и точечного спектра оператора. Определение резольвентного множества и резольвентного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Определение непрерывного и остаточного спектра оператора. Определение спектра оператора. Простейшие свойства спектра, в том числе, то, что спектр является замкнутым множеством и содержится в замкнутом круге, радиус которого равен норме оператора.

7.8. Линейные функционалы: определение и пример линейного функционала; определение ядра линейного функционала. Свойства ядра линейного функционала, в том числе то, что ядро линейного функционала всегда является подпространством; что ядро ненулевого линейного функционала имеет коразмерность один; и что линейный функционал непрерывен, если и только если его ядро замкнуто. Определение сопряжённого пространства. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала.

7.9. Бра- и кет-векторы: Введение бра- и кет-обозначений. Примеры использования бра- и кет-обозначений для нахождения разложения тождественного опреатора и нахождения резольвентного оператора.

7.10. Оператор, сопряжённый к ограниченному: определение. Свойства оператора, сопряжённого к ограниченному. Пример нахождения оператора, сопряжённого к оператору, отображающему кончномерное пространство в конечномерное. Теорема о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра (без доказательства).

7.11. Ограниченные самосопряжённые операторы: определение; теорема о точечном спектре и ортогональности собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Определение и примеры инвариантных подпространств. Теорема об инвариантном подпространстве. Теорема о норме самосопряжённого оператора (без доказательства).

7.12. Компактные операторы: определение и простейшие свойства. Теорема о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора (без доказательства).

Литература: основная — 3; дополнительная — 1, 6, 7 (глава IV, §§ 5 и 6), 9 (главы 7 и 8).

8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих, в том числе — сведение начальной задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра.

8.2. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта: определение, теоремы о компактности и об операторе, сопряжённом к опертору Гильберта — Шмидта.

8.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром: определение вырожденного ядра, сведéние решения интегрального уравнения с вырожденным ядром к решению системы линейных алгебраических уравнений.

8.4. Альтернатива Фредгольма: формулировка для компактных операторов, доказательство только для операторов Гильберта – Шмидта с вырожденным ядром.

8.5. Уравнения с малым параметром: ряд Неймана; метод последовательных приближений. Определение повторного ядра. Теорема о повторном ядре оператора Гильберта – Шмидта.

8.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами: теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов с симметричным ядром; разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

8.7: Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Билинейная формула. Теорема Мерсера (без доказательства).

Литература: основная — 5; дополнительная — 6, 7 (глава IX).

Литература

Учебные и методические пособия, изданные в НГУ, доступны в электронном виде на сайте кафедры `http://www.phys.nsu.ru/ok03`

1. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
3. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
4. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.

6. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
8. *Подвигин И. В.* Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учебно-метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012.
9. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1.

План семинаров

1-й семинар. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.

2-й семинар. — Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Поляризационные тождества.

3-й семинар. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование на конечномерные и бесконечномерные подпространства. Задача наилучшего приближения.

4-й семинар. — Нахождение замыкания подпространства. Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств.

5-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов. Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул.

6-й семинар. — Многочлены Эрмита: вывод и использование соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.

7-й семинар. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.

8-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.

9-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.

10-й семинар. — Линейные функционалы. Бра- и кет-векторы.

11-й семинар. — Сопряжённый оператор. Спектр и резольвента ограниченного оператора.

12-й семинар. — Спектр и резольвента ограниченного оператора. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра.

13-й семинар. — Компактные операторы. Задачи на спектр компапакных и компактных самосопряжённых операторов.

14-й семинар. — Сведéние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

15-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

16-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Представление решения неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром в виде ряда по собственным функциям ядра.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением

1. Пусть $M_{m\times n}$ обозначает совокупность всех прямоугольных матриц размера $m\times n$. Убедитесь, что "обычные" (т. е. известные вам из линейной алгебры) операции сложения матриц и умножения матрицы на число превращают $M_{m\times n}$ в линейное пространство. Найдите его размерность.

2. Докажите, что скалярное произведение (x, y) любых двух точек x, y любого комплексного пространства со скалярным произведением удовлетворяет равенству

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{i\varphi}y\|^2 e^{i\varphi}\, d\varphi.$$

Смысл этого равенства в том, что оно выражает скалярное произведение через норму вектора. Известно много таких равенств. Обычно их называют *поляризационными тождествами.*

3. Найдите углы треугольника, образованного векторами

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 1, \quad f_3(t) = t$$

в евклидовом пространстве $L_2[-1, 1]$. Чему равна сумма углов этого треугольника?

4. Пусть S обозначает подпространство пространства $L_2[-1, 1]$, натянутое на функции

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = t, \quad f_3(t) = t^2.$$

Найдите ортогональную проекцию функции $g(t) = \operatorname{sgn} t$ на S.

5. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству, состоящему из тригонометрических многочленов

$$\sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{int},$$

равных нулю при $t = 0$.

6. Убедитесь, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{it}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2it}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, \dots$$

является ортонормированной в $L_2[-\pi,\pi]$, но не является базисом этого пространства.

Ортогональные многочлены

7. Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, ортогонализуйте мономы 1, x, x^2 в весовом лебеговском пространстве $L_2^h(-\infty,+\infty)$, если весовая функция h задана формулой $h(x) = e^{-x^2}$. Обратите внимание, что тем самым вы нашли три первых многочлена Эрмита. Каким условием они стандартизованы?

8. Как известно, если многочлены $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ ортогональны на интервале $(-a,a)$ с весом h, являющимся чётной функцией, то при нечётном $n = 2k+1$ многочлен q_n содержит только нечётные степени независимой переменной, т. е.

$$q_{2k+1}(x) = xt_k(x^2),$$

где t_k — некоторый многочлен степени k. Докажите, что многочлены $t_k(x) = q_{2k+1}(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ сами образуют последовательность ортогональных многочленов. А именно, докажите, что они являются ортогональными многочленами на промежутке $(0,a^2)$ с весом $h_1(x) = \sqrt{x}h(\sqrt{x})$.

9. Докажите,что для всех $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо равенство

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!}.$$

Здесь $'$ обозначает производную, а $H_n(x)$ — n-й многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $H_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

10. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 [H_n(x)]^2 \, dx,$$

где $H_n(x)$ — n-й многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции.

11. Разложите функцию $\operatorname{ch} x$ в ряд по многочленам Эрмита, стандартизованным с помощью производящей функции. Здесь $\operatorname{ch} x$ обозначает гиперболический косинус числа x, т. е. $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$. Обоснуйте сходимость полученного ряда.

12. Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+2} [L_n^\alpha(x)]^2 \, dx.$$

Здесь $L_n^\alpha(x)$ — n-й многочлен Лагерра, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $L_n^\alpha(x)$ — это коэффициент тейлоровского разложения по переменной t с центром в нуле производящей функции многочленов Лагерра:

$$w\,(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\, t^n.$$

13. Докажите, что если n чётно, то $P_n(x)$ является чётной функцией от x, а если n нечётно, то — нечётной.

14. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2 [P_n(x)]^2 \, dx,$$

где $P_n(x)$ — n-й многочлен Лежандра, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $P_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 15–21 $M_a : \ell_2 \to \ell_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$M_a : (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1,\ a_2 x_2,\ a_3 x_3, \ldots),$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

15. Докажите, что оператор M_a непрерывен и найдите его норму.

16. Выясните является ли оператор M_a обратимым, и если является, то найдите M_a^{-1}.

17. Опишите сопряжённый к M_a оператор и выясните, когда оператор M_a самосопряжён. Выясните, когда оператор M_a унитарен.
18. Найдите точечный спектр оператора M_a.

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

19. Найдите непрерывный спектр оператора M_a.
20. Найдите остаточный спектр оператора M_a. Укажите резольвентное множество оператора M_a.
21. В каком из двух случаев оператор M_a компактен: если $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ или если $a_n = (-1)^n n^{-1}$?
22. Покажите, что используя «бра» и «кет» обозначения оператор проектирования P на подпространство, натянутое на единичный вектор x, можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.
23. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\big|([A,B]x,x)\big| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A\rangle_x = (Ax,x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2\rangle_x \langle B^2\rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B]\rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

24. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x''(t) + tx'(t) - 2t^2 x(t) = 3t^3, \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

25. Решите интегральное уравнение

$$x(t) = t - 1 + \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds,$$

сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

26. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) - \mu \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds = t$$

с вырожденным ядром

$$K(t,s) = 5 + 4ts - 3t^2 - 3s^2 + 9t^2s^2.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

27. Пусть A означает интегральный оператор с симметричным ядром, действующий в $L_2[0,\pi]$ по формуле

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} x(s)\sin|t-s|\,ds.$$

Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сведя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Программу и задания
по «Основам функционального анализа»
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров.
1 февраля 2022 года

Правила аттестации студентов по «Основам функционального анализа»

§1. Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студенту настоятельно рекомендуется сдать своему семинаристу в устной форме все 27 задач из приведённых выше заданий.

(2) За каждую задачу, кроме задачи 18, полностью сданную в срок, студент получает 6 баллов. За задачу 18 студент получает 12 баллов при условии, что она сдана в срок. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(3) В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски в классе, домашние задания, контрольные работы и т. п.

(4) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2) и (3) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации через страничку лектора на сайте кафедры

`http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html`

и учитывается при выставлении оценки за экзамен.

(5) Приём задач из задания семинаристами заканчивается с окончанием зачётной сессии, т. е. 30-го декабря 2021 года.

§2. Проведение экзамена

(6) Экзамен проводится в очной или дистанционной форме. Форма проведения экзамена определяется приказом ректора НГУ и / или распоряжением декана физического факультета НГУ накануне сессии. Правила проведения экзамена в очной форме изложены ниже в пунктах (9)–(20). Экзамен в дистанционной форме в целом проводится по тем же правилам; основные изменения изложены ниже в пунктах (21)–(888).

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы. При наличии уважительной причины и по предварительному согласованию с лектором в особых случаях допускается сдача экзамена с другой группой. Примером уважительной причины может служить поездка на Всероссийскую студенческую олимпиаду по теоретической механике.

(8) Поскольку по «Основам функционального анализа» не предусмотрен зачёт, то к сдаче экзамена допускаются все студенты (даже те, кто не сдал всех задач из приведённых выше заданий).

(9) Очный экзамен начинается с того, что студент вытягивает экзаменационный билет. Каждый билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Правила сдачи первого вопроса билета и оценивания ответа на него изложены в пунктах (11)–(14). Два других вопроса являются теоретическими вопросами (в частности, они не содержат задач) из программы лекций. Список теоретических вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается заранее (до проведения консультации) на страничку лектора на сайте кафедры

`http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html`.

Правила сдачи второго и третьего вопросов билета и оценивания ответов на них изложены в пунктах (16)–(19).

(10) Если студент не смог ответить хоть на один вопрос билета, то экзамен прекращается (т. е. остальные вопросы билета студент даже не отвечает), а в экзаменационную ведомость ставится оценка «неудовлетворительно».

(11) Ответ по билету всегда начинается с ответа на первый вопрос «Сдача задач из заданий и блиц-опрос», причём на этот вопрос нужно отвечать без подготовки и не своему семинаристу, а любому другому свободному экзаменатору. При успешном ответе на первый вопрос, этот же экзаменатор будет в последующем спрашивать второй и третий вопросы билета.

(12) Сдача задач из заданий (как часть ответа на первый вопрос билета) не может длиться более 30 минут. При этом студент может (и даже должен) пользоваться своей тетрадью, в которой он заранее решил те из 27 задач из приведённых выше заданий, решения которых он не сумел объяснить своему семинаристу во время семестра. Если за 30 минут студент сумел объяснить экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то он переходит к ответу на блиц-опрос (см. пункт (14) настоящих Правил); в противном случае экзамен заканчивается (см. пункт (10) настоящих Правил), но из долга студента вычёркиваются сданные им на экзамене задачи.

(13) Если студент сдал все задачи из заданий до начала экзаменационной сессии (что очень рекомендуется), то первый вопрос сводится для него к блиц-опросу.

(14) Блиц-опрос — это беседа с преподавателем на одну из тем, не вошедших в билет. Во время блиц-опроса экзаменатор задаёт 3–5

вопросов, на которые студент должен отвечать сразу (без подготовки). Цель блиц-опроса в том, чтобы выяснить насколько свободно студент владеет самыми основными понятиями и фактами, изученными в курсе «Основы функционального анализа». Речь идёт только о формулировках теорем и определениях. В этот момент доказательства теорем не спрашивают. По результатам блиц-опроса никаких оценок не ставится и баллы не начисляются. Но для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается в соответствии с пунктом (10) настоящих Правил.

(15) Студент, ответивший на первый вопрос билета получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(16) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета можно пользоваться только собственной головой. Другими словами, при подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена и отправлены на пересдачу.

(17) Выходить из аудитории до начала ответа на второй и третий вопросы билета нельзя (точнее — выйти можно, а вот снова войти уже нельзя).

(18) Экзаменатор может задавать сопутствующие вопросы, непосредственно вытекающие из ответа студента на второй и третий вопросы билета. Например, если студент в своём ответе упомянул какую-то теорему, свойство или понятие, то преподаватель может попросить сформулировать эту теорему (или свойство, или понятие) в общем виде и попросить проверить выполяются ли условия этой теоремы в той конкретной ситуации, в связи с которой студент эту теорему упомянул.

(19) В случае необходимости преподаватель может заменить сопутствующий вопрос задачей. Например, вместо того, чтобы спросить «что называется рядом Фурье» он может попросить найти ряд Фурье функции, тождественно равной единице, а вместо того, чтобы спросить «что называется преобразованием Фурье обобщённой функции», он может попросить найти преобразование Фурье от дельта-функции. В качестве таких задач, заменяющих сопутствующие вопросы, не используются задачи, требующие сложных вычислений или нестандартных подходов.

(20) Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибальной системе: «пятёрка» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы

экзаменатора; «четвёрка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из данного вопроса билета и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательсто не доведено до конца); «тройка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего); «двойка» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т. е. многократно используемых в курсе) определений.

(21) Положительные оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «пятёрка» — 200 баллов; «четвёрка» — 100 баллов, «тройка» — ноль баллов. (Напомним, что в соответствии с пунктом (10) настоящих Правил, «двойка», полученная за ответ на любой вопрос билета, немедленно ведёт к прекращению экзамена.)

(22) После того, как студент ответил (не на «двойку») на все вопросы билета, все заработанные им баллы суммируются (т. е. складываются баллы за ответы на второй и третий вопросы с баллами за работу в семестре). В ведомость (и зачётку) выставляется общая оценка за осенний семестр по курсу «Основы функионального анализа», определяемая следующим образом: «отлично» — если сумма баллов не меньше 500; «хорошо» — если сумма баллов от 300 до 499; «удовлетворительно» — если сумма баллов от 100 до 299; «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 100.

(23) Экзамен в дистанционной форме проводится в Google Meet и организуется так, чтобы максимально следовать правилам очного экзамена, изложенным выше в пунктах (9)–(22). Наиболее важные отличия в правилах проведения дистанционного экзамена от очного приведены ниже к пунктах (а)–(н):

(а) Лектор заранее (до консультации) выкладывает экзаменационные билеты на своей страничке на сайте кафедры.

(б) Лектор сообщает каждому студенту ссылку на встречу в Google Meet приблизительно за 15 минут до начала экзамена электронным письмом, отправляемым с его университетского почтового ящика на университетский адрес студента. Студент должен сам позаботиться о том, чтобы это письмо не попало в спам, и чтобы у него было надёжное интернет-соединение на всё время экзамена. Если низкое качество видео- и/или аудио-связи будет препятствовать проведению экзамена, то экзамен будет прекращён на любой стадии, а в экзаменационную ведомость будет выставлена отметка «неявка».

(в) Лектор заранее выставляет каждому студенту предварительную оценку. При этом он опирается на баллы, заработанные студентом в семестре и отзывы семинаристов. Студент об этой оценке не знает до начала экзамена.

(г) Экзамен и его видео-запись ведёт модератор на Google Meet встрече, описанной в пункте (б). Вызвав очередного студента, модератор просит его представиться на камеру и сообщает ему предварительную оценку.

(д) Если студент согласен с предварительной оценкой, то модератор с помощью датчика случайных чисел определяет должен ли студент всё равно сдавать экзамен. «Всё равно сдавать экзамен» должны будут примерно 10% студентов, согласившихся с предварительной оценкой. Это делается для проверки адекватности выставленной лектором предварительной оценки.

(е) Если студент согласен со своей предварительной оценкой и не попал в ситуацию, когда он «всё равно должен сдавать экзамен», то экзамен для него заканчивается, а предварительная оценка выставляется в экзаменационную ведомость. Иначе, модератор с помощью датчика случайных чисел определяет для студента номер билета и назначает экзаменатора (т.е. сообщает имя встречи в Google Meet, уже открытой экзаменатором).

(ж) Студент переходит на указанную ему модератором встречу с экзаменатором, которая записывается от начала до конца экзамена, и приступает к ответу на билет в соответствии с пунктами (10)–(15) и (18)–(22) настоящих Правил.

(з) Если у студента есть долги по заданиям, то он должен заранее сфотографировать или отсканировать листки со своими решениями соответствующих задач и выложить этот файл в Google Docs в папку, указанную экзаменатором. При этом сдача долгов состоит в том, студент демонстрирует экзаменатору соответствующий файл в Google Meet, комментирует свои решения и отвечает на сопутствующие вопросы.

(и) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета студент может пользоваться любой литературой или конспектами. В частности, он может отключить видео-камеру и микрофон. Но он должен немедленно выйти на связь, если экзаменатор обратится к нему в Google Meet. Не нужно думать, что переписывание больших кусков текста из учебников или конспекта поможет студенту сдать экзамен. Ведь экзаменатор будет оценивать понимание излагаемого студентом материала и, в частности, его способность отвечать на сопутствующие вопросы.

(к) Закончив подготовку ко второму и третьему вопросам билета, студент фотографирует листки со своими ответами и выкладывает их в Google Docs в папку, указанную экзаменатором.

(л) Ответ на второй и третий вопросы билета состоит в том, студент демонстрирует экзаменатору соответствующий файл в Google Meet, комментирует свои записи и отвечает на сопутствующие вопросы. При этом студенту разрешается использовать только свои записи (т.е. запрещается использовать книги, конспекты, или подсказки от кого-либо).

(м) Если студент считает, что ему несправедливо занизили оценку, то он имеет право на апелляцию. А именно, он может изложить свои претензии в электронном письме на адрес лектора
<v.aleksandrov@g.nsu.ru> и (под копирку) заведующего кафедрой — Александра Петровича Ульянова <a.ulyanov@g.nsu.ru>. Важно, что эта претензия должна быть получена в день экзамена не позднее 23:59 по новосибирскому времени. В течение трёх дней видеозапись ответа студента будет просмотрена лектором или другим преподавателем кафедры по выбору заведующего кафедрой. О принятом по результатам апелляции решении студент будет немедленно проинформирован по электронной почте.

(н) Лектор оставляет за собой право в течение трёх дней аннулировать результат экзамена конкретного студента в случае грубого нарушения им правил проведения экзамена. Примерами грубого нарушения могут служить такие ситуации: под именем данного студента на экзамен пришёл другой человек; или студент получил от модератора один билет, а экзаменатору стал отвечать другой билет; или на видео-записи видно, что студенту подсказывали во время ответа. Аннулирование результата экзамена обосновывается видео-записью ответа студента. О принятом решении лектор сообщает и студенту, и деканату не позднее, чем через три дня после экзамена.

§3. Проведение пересдачи

(24) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

(25) На пересдаче долг по задачам из заданий состоит из задач, не сданных в течении семестра, на основном экзамене и на предыдущих пересдачах.

§4. Особые ситуации

(26) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе (например, если из-за праздников пропало занятие и студенты ещё

не решали в классе задачи, аналогичные некоторым задачам из задания), так и отдельному студенту (например, в случае его продолжительной болезни или командировки для участия в студенческой олимпиаде). В любом случае продление срока должно быть согласовано с лектором.

(27) Все конфликтные, спорные и неоднозначные ситуации, возникающие при изучении курса «Основы функционального анализа», урегулирует лектор. Это касается как работы в семестре, так и сдачи экзамена и проведения пересдачи.

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров.