

**Список вопросов, включённых в экзаменационные билеты
по “Основам функционального анализа”.
Зимняя сессия: январь 2022 г.**

Начнём с напоминания общих положений из “Правил проведения очного экзамена” по “Основам функционального анализа”. Полностью правила изложены на стр. 11-14 и 17 файла http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/2021_2022/OFA_3_21.pdf содержащего программу лекций, план семинаров, задания и правила аттестации студентов:

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Блиц-опрос состоит в том, что студенту нужно без подготовки сформулировать пять определений или теорем, указанных преподавателем, по темам, не вошедшим в два других вопроса билета. Эти два других вопроса билета являются теоретическими вопросами (в частности, они не содержат задач) из программы курса.

Ниже приведён список теоретических вопросов из программы курса, включённых в экзаменационные билеты в качестве второго и третьего вопросов. По сути это перечень всех разделов программы.

§1. Ряды Фурье

- 1.1. Понятие о ряде Фурье 2π -периодической функции и задача о разложении функции в ряд Фурье.
- 1.2. Разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом.
- 1.3. Разложение в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам.
- 1.4. Лемма Римана-Лебега для конечного промежутка: формулировка, строгое доказательство для непрерывно дифференцируемых функций и идея доказательства в общем случае.
- 1.5. Ядро Дирихле: вывод формулы для ядра Дирихле и доказательство его свойств.
- 1.6. Теорема о представимости функции в точке её рядом Фурье: формулировка и доказательство.
- 1.7. Примеры разложения функции в ряд Фурье и суммирования числового ряда с помощью ряда Фурье.
- 1.8. Ряд Фурье в комплексной форме.
- 1.9. Разложение функции в комплексный и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов.
- 1.10. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.
- 1.11. Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами и неравенство Бесселя: сформулировать соответствующие теоремы и доказать их.
- 1.12. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье: формулировка и доказательство.
- 1.13. Явление Гиббса (без доказательства).
- 1.14. Равенство Ляпунова (в том числе обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме): формулировка и доказательство.
- 1.15. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами: только формулировки без доказательства.

§2. Преобразование Фурье

- 2.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.
- 2.2. Теорема о представимости функции в точке её интегралом Фурье: формулировка без доказательства.
- 2.3. Представление функции на полупрямой её интегралом Фурье. Прямое и обратное синус-и косинус-преобразование Фурье.

- 2.4. Примеры представления функции её интегралом Фурье на полупрямой, а именно, вычисление синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$ и вычисление интегралов Лапласа.
- 2.5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Прямое и обратное преобразования Фурье. Формула обращения.
- 2.6. Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье, а именно, вычисление прямого и обратного преобразований Фурье от функции $f(x) = e^{-ax^2}$.
- 2.7. Быстро убывающие функции: определения, примеры и свойства.
- 2.8. Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и свойства.
- 2.9. Равенство Парсеваля: формулировка и доказательство.
- 2.10. Дальнейшие свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций: свёртка быстро убывающих функций (дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать формулу для преобразования Фурье от свёртки), формула Пуассона (без доказательства), теорема Котельникова-Шеннона (без доказательства).

§3. Преобразование Лапласа

- 3.1. Определение и простейшие свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема сдвига, теорема подобия и теорема о дифференцировании оригинала – формулировки и доказательства.
- 3.2. Применение преобразования Лапласа для решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 3.3. Дальнейшие свойства преобразования Лапласа: аналитичность изображения (сформулировать и объяснить идею доказательства) и формула обращения (сформулировать и доказать). Свёртка оригиналов: определение, теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля – сформулировать и доказать обе.

§4. Обобщённые функции

- 4.1. Пробные (или, что то же самое, основные) функции: определение и примеры основных функций. Пространство пробных функций.
- 4.2. Пространство обобщённых функций: дать определение обобщённой функции.
- 4.3. Примеры обобщённых функций.
- 4.4. Формулы Сохоцкого: формулировка и доказательство.
- 4.5. Сходимость обобщённых функций. Дельтаобразная последовательность. Формулировка и доказательство теоремы о пределе дельтаобразной последовательности. Плотность распределения массы тела, имеющего единичную массу, сосредоточенную в одной точке.
- 4.6. Линейная замена переменной в обобщённой функции: наводящие соображения, определение и примеры.
- 4.7. Умножение обобщённых функций: наводящие соображения, определение умножения на бесконечно дифференцируемую функцию, примеры вычисления произведений, а также пример, показывающий невозможность распространения операции умножения на произвольные обобщённые функции.
- 4.8. Дифференцирование обобщённых функций: наводящие соображения, определение и примеры вычисления. Формулировка (без доказательства) теоремы о связи классической и обобщённой производных. Плотность распределения заряда электрического диполя.
- 4.9. Свёртка обобщённых функций: определение и четыре свойства (доказать только формулу для свёртки с дельта-функцией). Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.
- 4.10. Преобразование Фурье обобщённых функций: дать определение.

Составил В.А. Александров
11 января 2022 г.