Александров Виктор Сергеевич

Основы функционального анализа

www.phys.nsu.ru/ok03 → Преподаватели → Александров → Преподавание

§1 Ряды Фурье

1.1 Задача о разложении функции в ряд Фурье

Функциональный ряд — ряд из функций

Из физики $\Rightarrow \exists$ периодические процессы.

Опр. $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ — произвольны — тригонометрический ряд

Задача о разложении функции в триг. ряд: Для данной $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ существуют ли числа a_n, b_n такие, что $\forall x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$? (1)

Если „да", то как найти a_n, b_n?

Замечание 1: Если (1) имеет место, то f — 2π-периодическая, т.е. $f(x+2\pi)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Задачу о разложении ф. в триг. ряд имеет смысл ставить только для 2π период функций.

Замечание 2: Равенство (1) для 2π период ф. ~~достато~~ достаточно рассмотреть промежуток длины 2π. ($[-\pi,\pi]$ или $[0,2\pi]$).

Наводящие соображения.

Допустим, что (1) справедливо. Как найти a_n, b_n? Проинтегрируем (1) по $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}dx}_{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{(-1)^n-(-1)^n}{n}=0}\Big)$$

Т.о. $$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx} \quad (2)$$

Умножим (1) на $\cos mx$ и проин. по $[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\Big)$$

$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}\cos(n-m)x+\frac{1}{2}\cos(n+m)x$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x}_{=0 \text{ т.к. } n+m\neq 0} \to \begin{cases}0, & \text{если } n\neq m\\ 2\pi, & \text{если } n=m\end{cases}$$

Аналогично, умножив (1) на $\sin mx$, получим $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$

Значит, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\cdot\pi \Rightarrow \boxed{a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx}$ (3)

Аналогично, $\boxed{b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx}$ (4)

Опр. Формулы (2)–(4) называются формулами Эйлера – Фурье.
Триг. ряд (1), в котором a_n, b_n найдены по (2) – (4), называется „формальным" рядом Фурье функции f. Для формального ряда Фурье используют обозн. $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Замечание: Формула (2) – частный случай (3)

1.2 Разложение функции с произвольным периодом.

Пусть $\ell>0$ и $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – 2ℓ период функция. Сделаем линейную замену переменных $\frac{\pi x}{\ell}=y$, где $x\in(-\ell,\ell)$, $y\in(-\pi,\pi)$

$g(y)=f(x)=f\left(\frac{y\ell}{\pi}\right)$. В таком случае $g(y)$ – 2π-периодическая:

$$g(y+2\pi)=f\left(\frac{2\pi+y}{\pi}\ell\right)=f\left(\frac{y\ell}{2\pi}+2\ell\right)=f\left(\frac{y\ell}{\pi}\right)=g(y)$$

Построим ряд Фурье для g: $g(y)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)$, где

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\cos ny\,dy$, $n=0,1,2,\dots$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\sin ny\,dy$, $n=1,2,\dots$

Вернёмся к x и $f(x)$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right),\quad (5)$$ где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx\quad n=0,1,2,\dots\quad(6)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx,\quad n=1,2,\dots\quad(7)$$

Форм. (5) называется рядом Фурье 2ℓ-периодических ф., а формулы (6) и (7) называются фор. Эйлера – Фурье для 2ℓ-период. ф.

1.3 Разложение только по синусам и косинусам

I шаг: Если f — чётная ф., то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Док-во: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Замена $x=-x$

Аналогично: если f — нечётная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

II шаг: Пусть $f:(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$. Продолжим её на $(-\pi,\pi)$ чётным образом, тогда для этой чётной ф. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{чётная}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{нечётная}}dx = 0 \Rightarrow f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ — разложение $f:(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$ в ряд Фурье только по косинусам

Пусть $f:(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$. Продолжим её на $(-\pi,\pi)$ нечётным образом. Тогда для этой продолженной функции $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx\,dx}_{\text{нечётная}}=0$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{чётная}}dx =$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$, $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ — разложение f в ряд Фурье только по синусам.

1.4 Лемма Римана–Лебега для конечного промежутка

Опр. Функция $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ наз-ся <u>абсолютно интегрируемой</u> по (a,b), если существует и конечен интеграл $\int_a^b|f(x)|dx$, т.е. если $\int_a^b|f(x)|dx<+\infty$

Лемма (Римана и Лебега): Для всякой абсолютно интегрируемой функции $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx=0$ $([a,b]\subset\mathbb{R})$

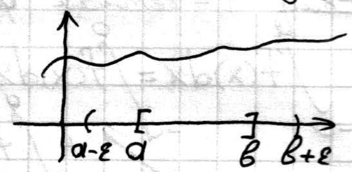
Замечание 1: Какой интеграл имеется в виду? Ответ: Хоть Римана, хоть Лебега

Замечание 2: Простые ~~изложения~~ изменения в д-ве показывают, что справедливо и след. утв. $\lim\limits_{p\to-\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx=0$

$\lim\limits_{p\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx=0$, $\lim\limits_{p\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{ipx}dx=0$

Док-во:

I случай: Пусть f - непрерывно дифференцируема, точнее f задана на $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ и непрерывно дифференцируема на нём.



$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| = \frac{1}{p}\left|\int_a^b f(x)\,d(\sin px)\right| =$$

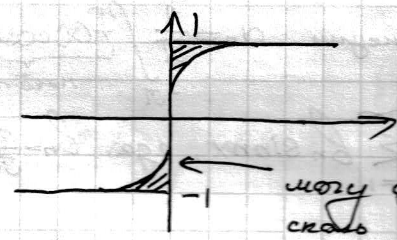
$$= \frac{1}{p}\left| f(x)\sin px\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\sin px\,dx\right| \le \frac{1}{p}\Big[|f(b)\sin pb| + |f(a)\sin pa| +$$

$|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|$

$$+\left|\int_a^b f'(x)\sin px\,dx\right|\Big] \le \frac{1}{p}\Big[|f(b)|+|f(a)|+\left|\int_a^b f'(x)\,dx\right|\Big] = \frac{const}{p}\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

II случай: f - абс. интегр. Будем опир. на утв.: если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - абс. интегр. ф., то $\forall\varepsilon>0\ \exists f_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$ - непр. дифф. такая, что $\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$ (без док-ва)

Поясним на примерах:



$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

могу сделать площадь сколь угодно малой

~~Фикс~~ Фиксируем $\varepsilon>0$

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) + f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x))\cos px\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f_\varepsilon\cos px\,dx + \int_a^b (f(x)-f_\varepsilon(x))\cos px\,dx\right| \le \underset{\begin{smallmatrix}\wedge\\ \varepsilon\ \text{по случаю I, т.к. } p\to+\infty\end{smallmatrix}}{\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px\,dx\right|} +$$

$$+ \underset{\begin{smallmatrix}\wedge\\ \varepsilon\ \text{по утв.}\end{smallmatrix}}{\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx} \le 2\varepsilon$$

1.5 Ядро Дирихле

Пусть f - 2π-период. функция, a_n, b_n - её коэфф. Фурье, найденные по формуле Эйлера-Фурье, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\overset{?}{=}f(x)$

Др. словами: $S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ - частичная сумма р. Ф. функции f. Тогда наш вопрос $S_N(x)\xrightarrow[n\to\infty]{?}f(x)$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

Тогда $S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\frac12+\sum_{n=1}^{N}\big(\underbrace{\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx}_{\cos n(t-x)\ \overset{\text{обозн.}}{=}\ \cos\alpha}\big)\Big]dt$

Нужно найти $\frac12+\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha$.

Воспользуемся $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\cdot\frac12\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$+$$
$$\cancel{\sin\frac32\alpha}-\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$+$$
$$\sin\frac52\alpha-\cancel{\sin\frac32\alpha}=2\cos2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$+$$
$$\cdots$$
$$\sin\frac{2N+1}{2}\alpha-\sin\frac{2N-1}{2}\alpha=2\cos N\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \sin\frac{2N+1}{2}\alpha=2\Big[\frac12+\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos N\alpha\Big]\sin\frac{\alpha}{2}\ \Rightarrow\ [\ \ ]=\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2N+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$ = это интеграл Дирихле.

Замена переменных $t-x=z$

$$=\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \underset{\uparrow\ 2\pi\text{-период}}{f(x+z)}\ \frac{\sin\frac{2N+1}{2}z}{\underset{\uparrow\ 2\pi\text{-период}}{2\sin\frac{z}{2}}}\,dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,\frac{\sin\frac{2N+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz=$$

2π-период

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,D_N(z)\,dz,\ \text{где}\ D_N(z)=\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}z\right)}{2\pi\sin\frac{z}{2}}\ \text{— ядро Дирихле}$$

Св-ва ядра Дирихле: ① D_N – чётная ф-ция, т.е. $D_N(-z)=D_N(z)\ \forall z$

② $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)\,dz=1$, т.к. $D_N(z)=\Big[\frac12+\cos z+\ldots+\cos Nz\Big]\frac{1}{\pi}$

1.6 Теорема о представимости ф. в точке её рядом Ф.

Опр. 2π-период. функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой, если на $[-\pi,\pi]$ $\exists$ конечное число точек $-\pi=x_0<x_1<x_2\ldots<x_n=\pi$ такие, что ① на каждом (x_k,x_{k+1}) ф. f непр. дифф.

② $\forall k$ сущ. и конечен пределы $f(x_k+0)=\lim_{h\to0+}f(x_k+h)$, $f(x_k-0)=\lim_{h\to0+}f(x_k-h)$ – пределы слева и справа.

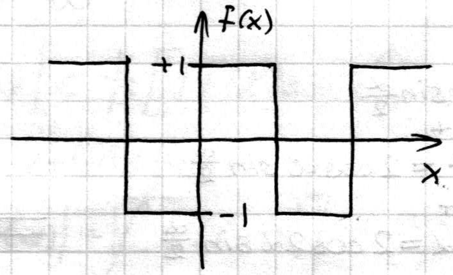
③ $\forall k$ сущ. конечные пределы $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_k+h)-f(x_k+0)}{+h}$ и

$\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_k-h)-f(x_k-0)}{-h}$

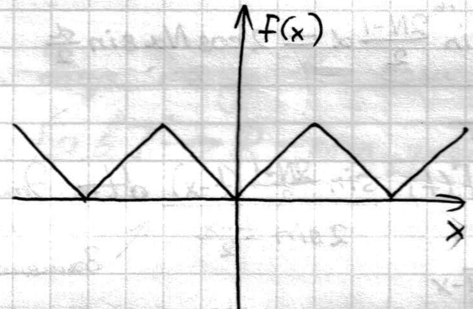
Замечание: пределы из ③ очень похожи на правую и леву производную в т. x_k: $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}$ и $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_k+h)-f(x_k)}{-h}$.

Примеры кусочно-гладких:

1.) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, если $x\in(-\pi,\pi)$



$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_1+h)-f(x_1+0)}{h} \overset{x_1=0}{=} \lim_{h\to 0+}\frac{1-1}{h}=0$$



2.) $f(x)=|x|$, если $x\in(-\pi,\pi)$

Теорема (о представимости ф. в точке рядом Фурье).

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – 2π-периодич., кус.-гл. ф. Тогда ряд Фурье ф. f сходится $\forall x\in\mathbb{R}$, причём его сумма равна $=$

$$=\begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{т. непрерывности } f\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{если } x - \text{т. разрыва } f.\end{cases}$$

Док-во: Т.к. $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)$ в любой точке непрерывности f, то достаточно док-ть, что $S_N(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

~~(1.5)~~

$$\overset{(1.5)}{=}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_N(z)\,dz-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}D_N(z)\,dz}_{=1 \text{ по св-вам ядра}}=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x+z)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right\}D_N(z)\,dz=\underbrace{\int_{-\pi}^{0}\dots dz}_{\substack{\text{замена}\\ z\to -z}}+\int_{0}^{\pi}\dots dz=$$

$$=-\int_{+\pi}^{0}\left\{f(x-z)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)\right\}\underbrace{D_N(z)}_{\text{чётная}}\,dz+\int_0^{\pi}\dots dz=$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{[f(x+z)+f(x-z)]-[f(x+0)+f(x-0)]\right\}D_N(z)\,dz=$$

$$= \int_0^\pi [f(x+z) - f(x+0)] \frac{\sin\frac{2N+1}{2}z}{2\pi\sin\frac z2}\,dz + \int_0^\pi [f(x-z)-f(x-0)]\frac{\sin\frac{2N+1}{2}z}{2\pi\sin\frac z2}\,dz$$

Лемма Р-Л: $\int_a^b g(z)\sin pz\,dz \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, если $\int_a^b |g(z)|\,dz < +\infty$

$p=\frac{2N+1}{2} \Rightarrow$ Первый интеграл будет стремиться к 0 при $N\to\infty$, если $\int_0^\pi \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\pi\sin\frac z2}\right|dz<+\infty$. Что происходит в окр. т. $x=0$?

$$\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{\frac z2}{\pi\sin\frac z2}$$

имеет конечный предел по условию 3 из опр. кусочн.-гл. ф.

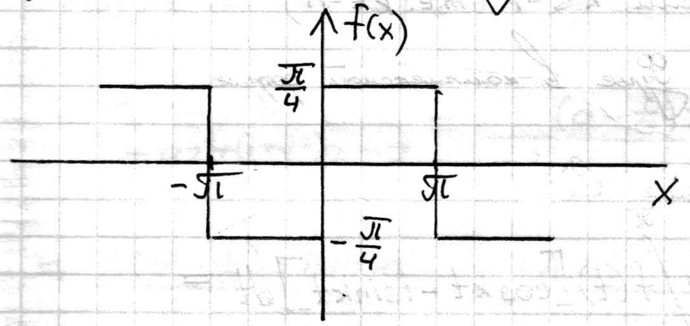
$\downarrow z\to 0$

$\frac{1}{\pi}$

Поэтому $S_N(x) - \frac12[f(x+0)+f(x-0)]\to 0$

Примеры разложения функции в ряд Фурье и нахождение суммы числового ряда

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π период., и $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } 0<x<\pi \\ 0, & \text{если } x=\pi, 0 \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{если } -\pi<x<0 \end{cases}$



f — нечёт $\Rightarrow a_n=0\ \forall n$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \left. -\frac{\cos nx}{n}\right|_0^\pi = -\frac{(-1)^n-1}{n}\Big| =$$

$$= \frac12\cdot\begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{1}{n}, & n=2k+1 \end{cases}$$

$f(x)\sim \sum_{\substack{n=1\\ n\text{-неч.}}}^\infty \frac{\sin nx}{n} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. Т.к. f — кусочн.-гл. и в точках разрыва $f(x)=\frac12(f(x+0)+f(x-0))$, то по т. о разложении ф. в её р. Ф. имеем $f(x)=\sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Подставим $x=\frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}=\left|\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^k\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-$$

— Ряд Лейбница

1.8 Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-период. и явл. непр. диффер. Тогда по т. о представимости ф. её рядом Фурье $\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Напоминание: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ — формула Эйлера

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

Т.о. $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$$\cos n\varphi=\frac{e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}}{2};\ \sin n\varphi=\frac{e^{in\varphi}-e^{-in\varphi}}{2i}=\frac{-ie^{in\varphi}+ie^{-in\varphi}}{2}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{-ie^{inx}+ie^{-inx}}{2}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_ke^{ikx}}_{\text{ряд Фурье в комплексной форме}},\text{ где } C_k=\begin{cases}\frac{a_k-ib_k}{2}, & \text{если } k\geq 1\\ \frac{a_0}{2}, & \text{если } k=0\\ \frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}, & \text{если } k\leq -1\ (\text{т.е. } k=-n)\end{cases}$$

Коэффициенты Фурье в комплексной форме

Найдём более удобные формулы для C_k:

Если $k\geq 1$: $C_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\cos kt-i\sin kt]dt=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt$$

Если $k=0$:

$$C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\underbrace{e^{-ikt}}_{=1,\text{ т.к. } k=0}dt$$

Если $k\leq -1$:

$$C_k=\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\cos(-k)t+i\sin(-k)t]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt$$

Итог: $f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}$ — р. Ф. в компл. форме

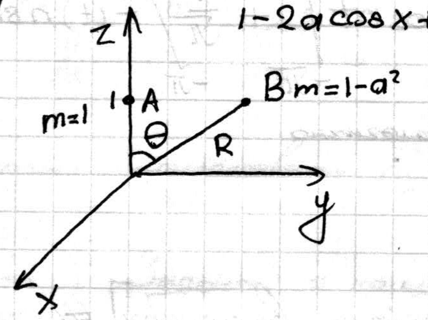
$C_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ — коэфф. Фурье в компл. форме

Упражнение: доказать, что это разложение в р. Фурье в компл. форме справедливо для 2π-период. непр. дифф. ф. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

Подсказка: $f(x)=g(x)+ih(x)$, где $g=\operatorname{Re} f(x)$, $h=\operatorname{Im} f(x)$ — 2π-период. вещ. значные функции.

1.9 Разложение функции в ряд Фурье без вычисления интегралов.

Пусть $f(x)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$, $a\in\mathbb{R}$, $|a|<1$



$$F=\frac{Gm_1m_2}{\rho^2}=\frac{G\cdot 1\cdot(1-a^2)}{1+R^2-2R\cos\theta}$$

Положим $\theta=x,\ R=\frac{1}{a}\Rightarrow F=G\frac{1-a^2}{\frac{1}{a^2}(a^2+1-2a\cos x)}=$

$$=const\cdot f(x)$$

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\left|\, z=e^{ix};\ \frac{1}{z}=e^{-ix}\right|=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Значит $f(x)=\frac{1-a^2}{1-a(z+\frac{1}{z})+a^2}=$

$$=\frac{(1-a^2)z}{-az^2+(1+a^2)z-a}=\frac{(a-\frac{1}{a})z}{z^2-(a+\frac{1}{a})z+1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{по т. Виета}}}{=}\frac{(a-\frac{1}{a})z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-\frac{1}{a}}=$$

$$=\frac{A(z-\frac{1}{a})+B(z-a)}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}=\frac{(A+B)z-(\frac{A}{a}+Ba)}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}\Longrightarrow\begin{cases}A+B=a-\frac{1}{a}\\ \frac{A}{a}+Ba=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=a\\ B=-\frac{1}{a}\end{matrix}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{z-a}-\frac{\frac{1}{a}}{z-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{1-az}=\frac{a}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n=$$

Напоминание: $\frac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q|<1$ — сумма геометр. прогрессии

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{-nx}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{inx}=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}e^{inx}}_{\text{ряд Фурье в комплексной форме}}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx$$

Упражнение: что будет, если $|a|>1$? А если $a\in\mathbb{C}$, но $|a|<1$?

1.10 Теорема о почленном интегрировании и дифф. рядов Фурье

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодич., непр. дифф. ф. Тогда по т. о представимости ф. в точке её р. Фурье $\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)$$

не производн.

Теорема (о почленном дифф. ряда Фурье). При сделанном допущении и предположении имеем
$$\begin{cases} a_0' = 0 \\ a_n' = n b_n \\ b_n' = -n a_n \end{cases}$$

Док-во: $a_n' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\, dt = \cancel{\frac{1}{\pi} f(t)\cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, n \sin nt\, dt =$
$= n b_n$. Остальные равенства док-ются аналогично

Замечание: Почему у т. такое название?

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(-n)\sin nx + b_n n \cos nx\right] \#$$

$$\# \quad f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx$$

Вывод: „Настоящий" ряд Фурье можно дифференц. почленно, но получим только условный ряд Ф. для $f'(x)$
(условный ≡ формальный)

Пусть $~~g(x)~~$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π период., непр. ф., причём $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt = 0$.

Тогда $g(x) \sim \cancel{\frac{a_0}{2}}^{\,0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Определим ф.

$G(x) = \int\limits_0^x g(t)\, dt$. Тогда $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непр. дифф. и 2π-период. ф.,

$G(0) = 0$. Тогда $G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$

Т. (о почленном интегр. р. Ф.). При сделанных выше допущениях и обозн., имеем $\frac{A_0}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$, $A_n = -\frac{b_n}{n}$, $B_n = \frac{a_n}{n}$

Док-во:

Т.к. $G'(x)=g(x)$, то из теоремы о дифференц. ряда Фурье $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$A_n=\frac{B_n}{n}$~~ $a_n=B_n\cdot n$ и $b_n=-nA_n$. Осталось док-ать формулу для

a_0. $\int\limits_0^x g(t)dt=G(x)\Big|_{x=0}=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_n=\frac{A_0}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=0$

Почему т. называется об „интегрировании" р. Фурье?

$$G(x)=\int\limits_0^x g(t)dt\overset{?}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\int\limits_0^x\cos nt\,dt}_{\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^x=\frac{\sin nx}{n}}+b_n\underbrace{\int\limits_0^x\sin nt\,dt}_{-\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^x=-\frac{\cos nx}{n}+\frac{1}{n}}\Big)=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}}_{\frac{A_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{b_n}{n}\right)}_{A_n}\cos nx+\underbrace{\left(\frac{a_n}{n}\right)}_{B_n}\sin nx$$

Значит интегрировать р. Фурье почленно можно.

1.11 Задача о наилучшем приближении тригонометр. многочленами

Опр. Пусть даны $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ и $\beta_1,\dots,\beta_n$ — вещ. числа

Выражение $T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_n\sin mx)$ — триг. многочлен степени n. коэф. $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ и $\beta_1,\dots,\beta_n$

Задача (о наилучшем прибл. триг. многочленами): Пусть даны число $n\in\mathbb{N}$ и 2π-период. непр. ф. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Требуется найти триг. многочлен $T_n(x)$ степ. n, который наилучшим образом прибликс. ф.

Уточнение: что значит „наилучшим"?

Ответ: 1.) $\sup\limits_{x\in[-\pi;\pi]}|f(x)-T_n(x)|\longrightarrow\min$. Из мат.анализа $\Rightarrow$ это минимизация в супремум-норме (или равномерной норме) или Чебышевской норме

2.) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|\,dx\longrightarrow\min$ — это минимизация в среднем

3.) $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx}\longrightarrow\min$ — это минимизация в средне-квадратичном

$\int_{-\pi} f^2(x)dx < +\infty$ (может быть неогр.)

<u>Уточнённая задача</u>. Пусть даны $n \in \mathbb{N}$ и 2π-период. ф. f. Требуется найти триг. многочлен $T_n(x)$ степ. n, такой чтобы $\forall R_n(x)$ — триг. мн. степ n выполняется неравенство $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-T_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-R_n(x)|^2 dx$.

Решение этой задачи даётся след. т.:

Теорема (о мн-не наилучшего приближения): Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π период. ф. такая, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$. Тогда след. усл. эквивалентны:

1.) T_n — многочлен наилучш. приближающий ф. f

2.) T_n совпадает с частичной суммой $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ ряда Фурье ф. f, т.е. $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$ и $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$

Док-во: преобр. выражение, которое необходимо минимизировать

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)\Big]^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}dx}_{=\frac{\alpha_0^2}{2}\pi} + \sum_{m=1}^{n}\Big(\alpha_m^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx}_{=\pi} + \beta_m^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx}_{=\pi}\Big) - \alpha_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}_{=\pi a_0} - 2\sum_{m=1}^{n}\Big(\alpha_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx}_{=\pi a_m} + \beta_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx}_{=\pi b_m}\Big) +$$

$+\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx =$, где $\sigma_n(x)$ явл. лин. комб с пост. коэфф. функций $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos mx \cos kx$ $(m \neq k)$, $\cos mx \sin kx$, $\sin mx \sin kx (m \neq k)$, $\int_{-\pi}^{\pi}$ от любой из этих функций равен. 0! Значит $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx = 0$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{\pi}{2}(\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0 + a_0^2) - \frac{\pi}{2}a_0^2 \cancel{+\pi\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m^2 - 2\alpha_m a_m + a_m^2) - \pi\sum_{m=1}^{n}(a_m^2}$$

выделяю полн. квадрат

$$+ \pi\sum_{m=1}^{n}\Big[(\alpha_m^2 - 2\alpha_m a_m + a_m^2) + (\beta_m^2 - 2\beta_m b_m + b_m^2)\Big] - \pi\sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) =$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)}_{\text{зависит только от } f(x)} + \underbrace{\frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2}_{\geq 0} + \pi\sum_{m=1}^{n}\underbrace{\Big[(\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2\Big]}_{\geq 0} \ (*) \to$$

$\xrightarrow{?}$ min Минимум достигается $\Longleftrightarrow$ $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_m = a_m$, $\beta_m = b_m$ $\forall m = 1, \dots, n$, т.е. $T_n(x) = S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье. $\square$

Теорема (неравенство Бесселя). Пусть f: 2π-период. ф. и $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$ и a_n, b_n — коэф. Фурье ф. f. Тогда $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ (***)

Для док-ва подставим в * $S_n(x)$ — част. сумма р. Ф° ф f вмест $T_n(x)$:

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(f(x) - S_n(x))^2}_{\text{нетр. ф.}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2)}_{\text{частичная сумма}} \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \quad (**)$$

Значит посл. частичных сумм ряда $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ явл. монотонно возр. (неубыв.) огр. сверху посл. $\Rightarrow$ ряд сходится

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в $(**)$ получим $(***)$

1.12 Равномерная сходимость ряда Фурье

Из матанализа $\Rightarrow$ функц. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к ф. $u(x)$, если $\sup\limits_{x \in [a,b]} \left| u(x) - \sum_{m=1}^{n} u_m(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Т. (Вейерштрасса о равномерной сходимости функц. ряда)
Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ ф. $u_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ такова, что $\exists c_n = const < +\infty$: $\forall x \in [a, b]$ $|u_n(x)| \le c_n$, причём $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх. равномерно на $[a, b]$

Т. (о равномерной сх-сти р. Фурье). Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-период., непр. дифф. ф. Тогда ряд Ф. ф. f сходится к ней равномерно на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Док-во: Ряд Ф ф-ии f сходится к f на $\mathbb{R}$ по т. о представимости ф. в точке её рядом Фурье. Почему сх-мость равномерная?

Положим $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$

$|u_n(x)| \le |a_n| \cdot |\cos nx| + |b_n| \cdot |\sin nx| \le |a_n| + |b_n|$. Т.к. f – непр. дифф., то f' разлагается в формальный ряд Ф, и пусть a_n', b_n' – её коэфф Фурье. По т. о дифф.-ти ряда Фурье $\Rightarrow a_n' = n b_n$, $b_n' = -n a_n$

$$|u_n(x)| \le \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \le \left| uv \le \frac{u^2+v^2}{2} \ \forall u, v \in \mathbb{R} \right| \le \frac{1}{2} |b_n'|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} =: C_n$$
$\forall x \in [-\pi, \pi]$

Почему $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится

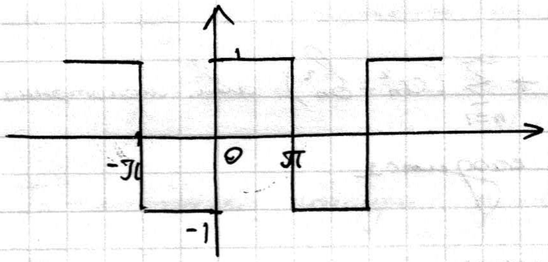
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n'|^2 + |b_n'|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \overset{\text{Нер-во Бесселя}}{\le} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx + \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

интеграл от непр. ф. по конечн. пром. сходится

Значит р. Ф ф. f сх-ся равномерно на $[-\pi,\pi]$, а значит на $\mathbb{R}$

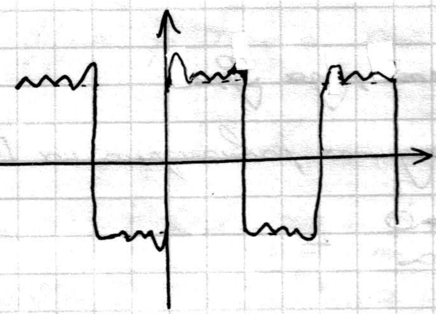
1.13 Явление Гиббса

Пусть $f(x)$ – 2π-период ф. : $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -\pi<x<0;\\ 0, \text{ если } x=0,\pi;\\ +1, \text{ если } 0<x<\pi;\end{cases}$



Знаем: $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

Положим $S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ – n-я частичная сумма р. Ф ф. f



S_n достигает лок максимума и минимума в т. $x=\frac{\pi}{2n}k$

Глобальный максимум $S_n(x)$ достигается в $x=\frac{\pi}{2n}$

$$\cancel{\max|f(x)-S_n(x)|}\ \max_{x\in[-\pi,\pi]}|S_n(x)| = S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\underbrace{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{(2k+1)\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2n}}_{} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

Сумма Римана интеграла $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$. Назовем: $Si(x)=\int\limits_0^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ – интегральный синус

$\longrightarrow \frac{2}{\pi}Si(\pi)=1{,}1789$, т.е.

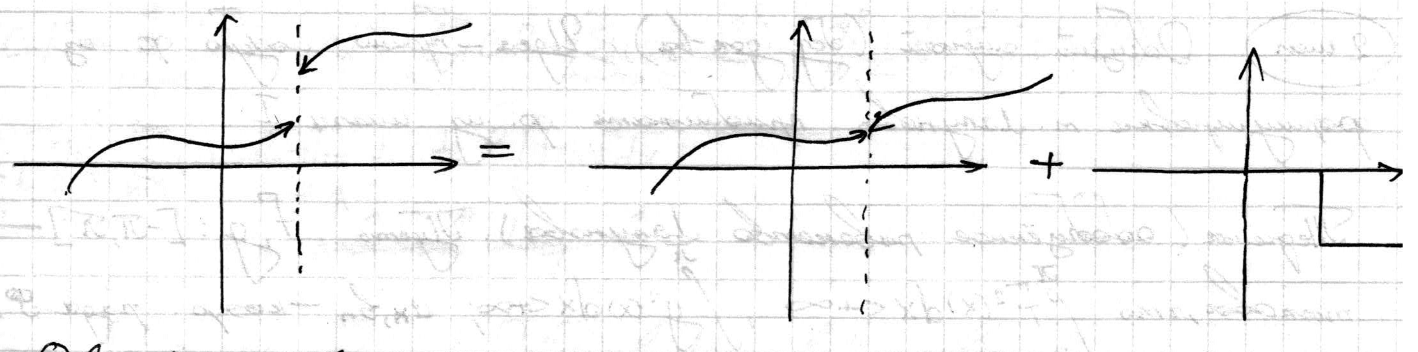
далее при больших n „переколебание" частичных сумм р. Ф в окр. т. $x=0$ превосходит величину разрыва ф. f на 18%

Это и есть явл. Гиббса

Опр. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\underline{\lim}_{x\to x_0-0} f(x) < \overline{\lim}_{x\to x_0+0} f(x)$

Говорят, что в т. x_0 имеет место явления Гиббса, если $\underline{\lim}_{\substack{x\to x_0-0\\ n\to\infty}} S_n(x) < \underline{\lim}_{x\to x_0-0} f(x) < \overline{\lim}_{x\to x_0+0} f(x) < \overline{\lim}_{\substack{x\to x_0+0\\ n\to\infty}} S_n(x)$

Замечание 1) в т. непрерывности явления Гиббса нет 2) Для любой кусочно-гл. ф. в т. разрыва есть явл Гиббса, причём с теми же 18%



1.14 Равенство Ляпунова

Теорема (равенство Ляпунова) Пусть $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx<+\infty$, a_n, b_n — коэфф. Фурье ф. f. Тогда $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$

Замечание 1 В теореме „р-во Ляпунова" всё также, как в т-ме „нер-во Бесселя", но $\leq$ заменена на $=$. Причина в том, что для док-ва $=$, мне нужно $\leq$

Замечание 2 Правда ли, что для ф. f такой, что $\int\limits^{\pi} f^2(x)\,dx<+\infty$ сущ a_n, b_n? Да: $|f(x)|=|f(x)|\cdot 1\leqslant\frac{1}{2}\left[|f(x)|^2+1\right]\Rightarrow$

$uv\leqslant\frac{1}{2}(u^2+v^2)$

$$\Rightarrow\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx<+\infty\Rightarrow$$ $f(x)$ — абс. интегрируема и a_n, b_n сущ.

Док-во: I шаг Считаем, что f явл. непр. дифф. даже после того, как её продолжили на $\mathbb{R}$. Тогда из 1.11 „Задача о наилучшем приближении" мы знаем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

Из 1.12 Равномерная сх-сть р. Ф $\Rightarrow$ для 2π-период непр. дифф. ф. $S_n(x)\underset{\substack{n\to\infty\\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows}f(x)$. Значит $|f(x)-S_n(x)|^2\underset{\substack{n\to\infty\\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows}0$. Из мат. анализа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если посл. функций $g_n(x)$ сх. равномерно на $[a,b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b g_n(x)\,dx=\int\limits_a^b\left[\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)\right]dx$

Следовательно, $$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}0\,dx=0=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum(a_k^2+b_k^2)$$

(2 шаг) Общий случай (без док-ва): Идея — нужно любую ф. из формулировки т. Ляпунова приближать ф. из шага I

Теорема (обобщённое равенство Ляпунова). Пусть $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ такова, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$, $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx < +\infty$; a_n, b_n — коэф. ряда Ф. ф. f; α_n, β_n — коэф. Ф. ф. g.

Тогда: $\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Замечание. Если $f=g$, то получим „обычное" р-во Ляпунова

Док-во: Коэф. Фурье ф. $f \pm g$ будут $a_n \pm \alpha_n$, $b_n \pm \beta_n$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = a_n + \alpha_n$$

Напишем рав-ва Ляпунова для ф. $f+g$ и $f-g$

1.) $$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2dx$$

2.) $$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n-\alpha_n)^2 + (b_n-\beta_n)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx$$

Вычтем из 1) 2)

$$\frac{1}{2}4a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[4a_n\alpha_n + 4b_n\beta_n] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4f(x)g(x)dx$$

Теорема (равенство Ляпунова в комплексной форме):

Пусть $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx < +\infty$, C_n — коэф. р. Ф ф. f.

Тогда $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Док-во:
$$\begin{cases} C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \text{ если } n \geq 1 \\ C_n = \frac{a_0}{2}, \text{ если } n=0 \\ C_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, \text{ если } n \leq -1 \end{cases}$$

$$|C_n|^2 = C_n \cdot \overline{C_n} = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}\cdot\frac{a_n+ib_n}{2} = \frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2), \ n \geq 1 \\ \frac{a_0^2}{4}, \text{ если } n=0 \\ \frac{1}{4}(a_{-n}^2 + b_{-n}^2), \ n \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{-1}|c_n|^2+|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_{-n}^2+b_{-n}^2)+\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]\underset{\text{равенство Ляпунова}}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Задача. Док-ать, что т. „Равенство Ляпунова" справедливо для комплексных функций. $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{C}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Подсказка: $f(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)=\operatorname{Re}f(x)$, $v(x)=\operatorname{Im}f(x)$

(1.15) Т. Вейерштрасса о равномерном приближении непр. ф. тригон. и алгебр. мн-членами:

Теорема (Вейерштрасса о равн. приб. тригон. мн-членами)

Пусть $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$ непрер. и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+$ $+\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx)$ – триг. многочлен, такой, что $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[-\pi;\pi]$

Теорема (Вейерштрасса о равн. приб. алг. мн-членами)

Пусть $a,b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\gamma_m x^m$ – алг. многочленен такой, что $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$

Замечание 1. Обе без док-ва.

Замечание 2. Мы не будем использовать эти теоремы. Они имеют мировоззренческий характер: если ф. задана приближённо, то можно считать, что эта функция – многочлен.

§ 2. Преобразование Фурье

(2.1) Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непр. (диффф.) и абс. интегр. (т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$)

Тогда $\forall\ell>0$ можем разложить f в ряд Фурье на промежутке $(-\ell,\ell)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right),\text{ где } a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{\pi nt}{\ell}dt$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int f(t)\sin\frac{\pi nt}{\ell}dt$$