

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |C_n|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

↑
равенство Парунва

Задача. Доказать, что т. "Равенство Парунва" справедливо для комплексных функций. $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Предположим: $f(x) = u(x) + i v(x)$, где $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$

1.15) III. Вейерштрасса о равномерном приближении непр. ф. тригон. и алгебр. мн-членами:

Теорема (Вейерштрасса о равн. приобл. тригон. мн-членами)

Пусть $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ непрер. и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ — триг. многочлен, такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [-\pi; \pi]$

Теорема (Вейерштрасса о равн. приобл. алг. мн-членами)

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрер. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists P_n(x) = \sum_{m=0}^n \alpha_m x^m$ — алг. многочлен такой, что $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$

Замечание 1. Об обз. д-ва.

Замечание 2. Мы не будем использовать эти теоремы. Они имеют широкоезренческий характер: если ф. задана приближенно, то можно считать, что эта функция — многочлен.

§2. Преобразование Фурье

2.1) Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрер. и абс. интегр. (т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$)

Тогда $\forall l > 0$ можно разложить f в ряд Фурье на промежутке $(-l, l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \text{ где } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt$$

Замечание. Это не естественное р-во.

его лев. и прав. части опр. $\forall x \in \mathbb{R}$, а само равенство имеет место только для $x \in (-l, l)$. Как исправить?

Перейдем к пределу при $l \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt \right) \cos \frac{\pi n x}{l} + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt \right) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \int_{-l}^l f(t) \left[\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi n t}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} + \sin \frac{\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \right] dt \stackrel{l \rightarrow \infty}{=} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} (x-t) dt$$

Обозначение $y_n = \frac{\pi n}{l}$, $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$

Тогда $\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{l} (x-t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos y_n (t-x) \cdot \frac{l}{\pi} \Delta y_n \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos y (t-x) dy$

Сумма Римана интеграла $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos y (t-x) dy$

$$\stackrel{l \rightarrow \infty}{=} \circ + \int_{-l}^l f(t) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos y (t-x) dy \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \{ \cos y t \cos y x + \sin y t \sin y x \} dt \right] dy$$

$\uparrow$ м.р. $\int_{-l}^l f(x) dx \leq \int_{-l}^l |f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$

$$= \int_0^{+\infty} [a(y) \cos y x + b(y) \sin y x] dy, \text{ где } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos t y dt$$

Интеграл $\uparrow$ Фурье от $f(x)$ $b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin t y dt$

Замечание. 3 последние формулы очень похожи на формулы для разложения ф. в ряд Фурье и формулы Фурье-Делера Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n t dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n t dt$$

2.2. Теорема (о представлении функции в точке её интегралом Фурье)

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная, абс. интегр. ф. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ спр-во:

$$\int_0^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy \text{ с.с.а. и его значение равняется}$$

$$\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

Опр. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на-сз кус.-н., если $\forall \ell > 0$ она абс. кус.-н. ф. в смысле теории рядов Фурье на $(-\ell, \ell)$

Замечание. Эта теорема без доп-ва, т.е. она аналогична тому же-бу теореме о представлении ф. в точке её рядом Фурье (п.1.6)

2.3. Представление ф. на полуоси её интегралом Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и она такова, что $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy, \text{ (условия могут отн. от тех, что на сформулированы)}$$

$$\text{где } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt \text{ и } b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt$$

$$\text{Случай 1: Пусть } f \text{ — чётная} \Rightarrow b(y) = 0, a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ty dt$$

прямое cos-преобр. функции f .

$$\text{Тогда } f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy$$

обратное cos-преобр. ~~н.н.~~

$$\text{Случай 2: Пусть } f \text{ — нечётная} \Rightarrow a(y) = 0; b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ty dt$$

$$\text{Тогда } f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy dy$$

обратное sin-преобр.

прямое sin-преобр. ф. f

Случай 3: Пусть $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Можно продолжить f чётным образом на всю числовую прямую (и пользоваться случаем 1) или нечётным образом (и пользоваться случаем 2)

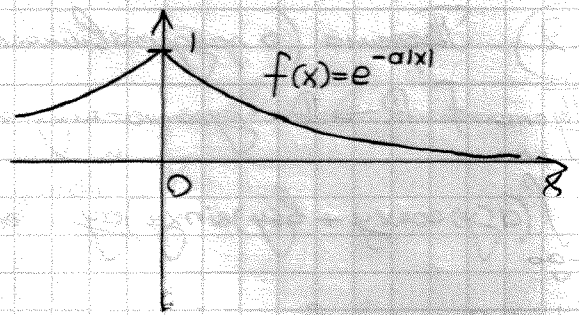
2.4. Пример представления функции её интегралом Фурье.

Пусть $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой $f(x) = e^{-\alpha x}$, где $\alpha > 0$

Предположим f на $\mathbb{R}$ четным образом

$$\text{Тогда } a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos ty \, dt =$$

=



~~Представление φ и её интеграла Фурье~~

Пусть

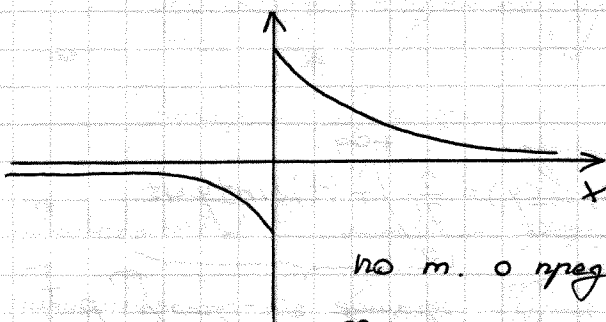
$$\begin{aligned} a(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos ty \, dt = \frac{2}{\pi a} \int_0^{+\infty} \cos xy \, d(e^{-ax}) = -\frac{2}{\pi a} \left[\cos xy \, e^{-ax} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi a} \left[-1 + \frac{y}{a} \int_0^{+\infty} \sin xy \, d(e^{-ax}) \right] = \frac{2}{\pi a} + \frac{2y}{\pi a^2} \left[\sin xy \, e^{-ax} \Big|_{x=0}^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi a} - \frac{2y^2}{\pi a^2} a(y) \frac{\pi}{2} \Rightarrow a(y) = \frac{2a}{\pi a^2 + y^2} = \frac{2a}{\pi(a^2 + y^2)} \quad \text{— это косинус преобразование} \end{aligned}$$

Т.е. $f(x) = e^{-a|x|}$ абс. непрерывн., абс. интегр. ф., то по теореме о представимости ф. в т. её интеграла Фурье можем написать:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy \, dy = \int_0^{+\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 + y^2)} \cos xy \, dy \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x > 0$$

↑
инт. Лапласа

Аналогично: представим $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$, $x > 0$ на $\mathbb{R}$ нечётн. образом



$$\text{Тогда } b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2}$$

Т.е. после представления f будет

x кусочно-заданной абс. интегр. ф., то

по т. о представимости ф. в точке её интеграла

Фурье можем написать

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy \, dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2} \sin xy \, dy, \quad x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0, y > 0, a > 0$$

↑
инт. Лапласа

(25)

Интеграл Фурье в комплексной форме
Преобразование Фурье ф-ии обращения

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место ф-ла

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy, \text{ где } a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt,$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt$$

Замечание: $a(y) = a(-y)$, т.е. $a(y)$ - четная ф.

$b(-y) = -b(y)$, т.е. $b(y)$ - нечетная ф.

Напоминание: формула Эйлера $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -\frac{ie^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}}{2}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[a(y) \frac{e^{+ixy} + e^{-ixy}}{2} + b(y) \frac{ie^{ixy} + ie^{-ixy}}{2} \right] dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy + \int_0^{+\infty} \frac{a(y) + ib(y)}{2} e^{-ixy} dy =$$

замена: $y \rightarrow -y \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{a(y) + ib(y)}{2} e^{-ixy} dy =$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \underbrace{\{\cos ty - i \sin ty\}}_{e^{-ity}} dt \right] e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt \right] e^{ixy} dy^{(*)}$$

- интеграл Фурье в комплексной форме.

Перепишем (*), используя обозначения;

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(y) - \text{Преобразование Фурье ф. } f. \quad \mathcal{F}_+[f(t)](y)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy \stackrel{\text{def}}{=} \check{g}(x) - \text{Обратное преобр. Фурье ф. } g \quad \mathcal{F}_-[g(y)](x)$$

$$f(x) \stackrel{*}{=} [\hat{f}(y)](x) = \mathcal{F}_-[\mathcal{F}_+[f](y)](x)$$

Аналогично, если сделать замену $y \mapsto -y$ в другом интеграле, то

$$f(x) = [\check{f}(y)](x) = \mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[f](y)](x)$$

Формула обращения для преобр. Фурье

Замечание 1. Иногда преобразования Фурье называют не $\mathcal{F}$ и $\check{\mathcal{F}}$, а правильно $\mathcal{F}_+ : f \mapsto \hat{f}$ и $\mathcal{F}_- : g \mapsto \check{g}$

Замечание 2. В разных книгах даются разные стр. преобр. Фурье.

Замечание 3. Мы определили прямое и обратное преобр. Фурье и вывели ^{ф-лу обращения} для функции: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Более естественно считать $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Упр. докажите, что ф-ла обращения справедлива для $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Предлагаю: $f(x) = u(x) + i v(x)$, $u(x) = \text{Re}(f(x))$ и $v(x) = \text{Im}(f(x))$

(2.6) Пример вычисления прямого и обратного преобр. Фурье

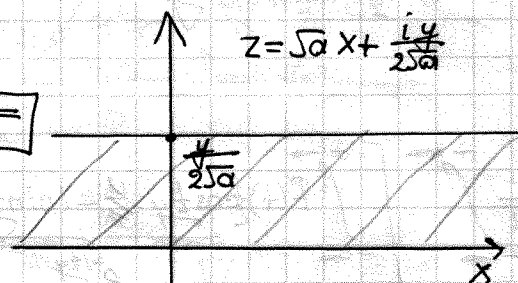
Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана ф-лой $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$

Найти $\hat{f}$ и $\check{f}$.

1-я попытка решения: $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + ixy)} dx \equiv$

Выделим полный квадрат: $ax^2 + ixy = (\sqrt{a}x)^2 + 2(\sqrt{a}x) \frac{iy}{2\sqrt{a}} + \left(\frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{y^2}{4a} =$
 $= \underbrace{\left(\sqrt{a}x + \frac{iy}{2\sqrt{a}}\right)^2}_z + \frac{y^2}{4a}$

$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{D}} e^{-z^2} e^{-\frac{y^2}{4a}} \frac{dz}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathcal{D}} e^{-z^2} e^{-\frac{y^2}{4a}} dz \equiv$



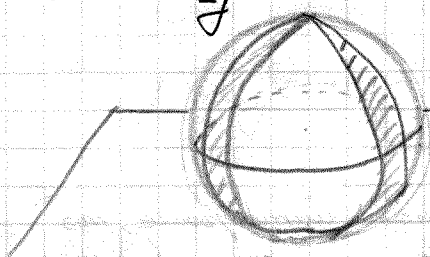
$\equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \right|$ - интеграл Пуассона

$= \left| \oint_{\partial D} f(z) dz = 0 \right|$ (интер. м. Коши) $\Rightarrow \int_{\mathcal{D}} f(z) dz = 0$, если f аналитична в $\mathcal{D}$ и ∂D -окр

в нашем случае $\mathcal{D}$ -полоса, $\partial D = \mathbb{R} \cup \{i\infty\} \Rightarrow$ по м. Коши

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz + \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-z^2} dz = 0$ (однако $\mathcal{D}$ не окр. и в ней есть особая т. $\pm\infty$) $\Rightarrow$

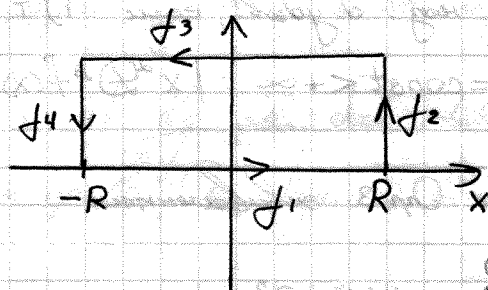
$\Rightarrow \int_{\mathcal{D}} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ - инт. Пуассона



$\equiv \frac{e^{-\frac{y^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \sqrt{\pi} \Rightarrow \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}$

2-я попытка

Теперь $\mathcal{D}$ окр. и
в $\mathcal{D}$ нет особых
точек ф. $f(z) = e^{z^2}$



Значит по т. Коши $0 = \int_{\mathcal{D}} e^{-z^2} dz = \int_{f_1} e^{-z^2} dz + \int_{f_2} e^{-z^2} dz + \int_{f_3} e^{-z^2} dz + \int_{f_4} e^{-z^2} dz$

Перейдем к пределу при $R \rightarrow +\infty$

Параметризируем кривую $f_2: z = R + it, t \in [0, \frac{\sqrt{y}}{2a}]$

Лекция 8
23 окт. 2021

$$\left| \int_{f_2} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\sqrt{y}}{2a}} i e^{-(R+it)^2} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\sqrt{y}}{2a}} e^{-R^2} \cdot e^{-2iRt} \cdot e^{t^2} dt = e^{-R^2} \int_0^{\frac{\sqrt{y}}{2a}} e^{t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

модуль равен 1

Аналогично, $\int_{f_4} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$. Значит, $\int_{f_1} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$, т.е. $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{4a}}$

Найдем $\check{f}(y)$. Заметим, что $\check{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i(x-y)} dx = \hat{g}(y)$.

Значит, $\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{(-y)^2}{4a}} = \hat{f}(y)$, т.к. f - четная.

2.7. Быстро убывающие функции

Опр 1. Мультииндексом α называется вектор, все компоненты которого $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ явл. целыми неотрицательными числами. При этом n -длина мультииндекса;
 $|\alpha| \stackrel{\text{опр.}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ - вес мультииндекса

$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ - факториал мультииндекса.

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ - сумма мульти-ов α и β

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall k=1, \dots, n$ выполнено нер-во $\alpha_k \leq \beta_k$

$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ - произв. порядка α

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Опр 2. Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется быстро убывающей, если 1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2) $\forall \alpha$ -мулт. и $\forall p > 0 \exists K_{\alpha,p} = \text{const} < +\infty : |D^\alpha f(x)| \leq \frac{K_{\alpha,p}}{1+|x|^p}$

вып. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ - евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$

Опр 3. $\mathcal{P}_2$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ наз. $\mathcal{D}$ -убыв., если 1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) $\forall \alpha, \beta$ -мульти. $\exists C_{\alpha, \beta} = \text{const} < +\infty : |x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)| \leq C_{\alpha, \beta}$

Лемма ($\mathcal{D}$ -убыв.). Опр. 2 и Опр. 3 эквивалентны

Примеры $\mathcal{D}$ -убыв. ф.: $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$f(x) = e^{-\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2 - \dots - \alpha_n x_n^2}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

Проверим, что $f(x)$ эв. $\mathcal{D}$ -убыв. ф.

Будем проверять опр. 3:

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ т.к. она эв. композицией бесконечно диффр. ф.

Убедимся, что $\forall \alpha$ -мульти. $\exists P_\alpha(x)$ -многочлен: $\mathcal{D}^\alpha f(x) = P_\alpha(x) f(x)$

По инд.: база - $\alpha = 0$, $P_\alpha(x) \equiv 1$

Шаг индукции: дока, что $\forall \alpha$ -мульти. $|\alpha| \leq n$ наше утв. уже доказано

Возьмём мульти. β : $|\beta| = n+1$. Тогда $\beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) + \alpha$
 $\uparrow$
 k -е место $|\alpha| = n$

$$\text{Тогда } \mathcal{D}^\beta f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} [\mathcal{D}^\alpha f(x)] = \frac{\partial}{\partial x_k} [P_\alpha(x) f(x)] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_k} P_\alpha(x) \right] f(x) + P_\alpha(x) f(x) (-2\alpha_k x_k) = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_k} P_\alpha(x) - 2\alpha_k x_k P_\alpha(x) \right]}_{\text{это многочлен, обозн. его } P_\beta(x)} f(x)$$

Теперь воспользуемся тем, что экспонента на бесконечности растёт

быстрее любой степени: $\frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$ - из мат. анализа. Аналогично

$$|x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)| = \frac{x^\alpha P_\beta(x)}{e^{\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2}} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$$

Наконец, воспользуемся из мат. анализа: если непр. ф. $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

стремится к 0 на бесконечности, то она оп., т.е. $\exists C = \text{const} < +\infty$:

$$|g(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)| \leq \max \left\{ \sup_{|x| < R} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)|, \right.$$

$$\left. \sup_{|x| \geq R} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)| \right\} \leq$$

$$\leq \max \{ \varepsilon, C \} =: C_{\alpha, \beta} < +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ выпад. уел. 2 из Опр 3.

$$g \rightarrow 0 \text{ на } \infty \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R < +\infty:$$

$$|g(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: |x| \geq R$$

III. Вейерштрасса: g -непр. в $|x| \leq R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists C = \text{const} : |g(x)| \leq C$$

Св-во 1. ур-в. ф: здесь $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ эв. д. ур-в. ф

[1] $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-я $af + bg$ эв. д. ур-в. ф, т.е. ин-во д. ур-в. ф-и удовлет. ин-во. Это эквив. $S(\mathbb{R}^n)$

Док-во:

Будем проверять стр. 3. для $af + bg$. Св-во 1.) - очевидно.

Проверим св-во 2): Пусть α, β - мультииндексы. Тогда $|x^\alpha \mathcal{D}^\beta [af(x) + bg(x)]| = |x^\alpha [a \mathcal{D}^\beta f(x) + b \mathcal{D}^\beta g(x)]| \leq |a| \cdot |x^\alpha \mathcal{D}^\beta f(x)| + |b| \cdot |x^\alpha \mathcal{D}^\beta g(x)| =: C_{\alpha, \beta} = \text{const} < +\infty$
 $\overset{\text{const}}{\text{т.к. } f(x) \text{ - д. ур-в. ф}} \quad \overset{\text{const}}{\text{т.к. } g(x) \text{ - д. ур-в. ф.}}$

[2] (произв. от д. ур-в. ф. снова эв. д. ур-в. ф.):

$\forall \alpha$ - мультиин. $\mathcal{D}^\alpha f$ эв. д. у.

Док-во:

Св-во 1.) - очевидно для $\mathcal{D}^\alpha f$.

Проверим 2): Пусть β, γ - мультиинд. $|x^\beta \mathcal{D}^\gamma [\mathcal{D}^\alpha f(x)]| = |x^\beta \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f(x)| \leq C_{\beta, \alpha+\gamma}$
 $\text{т.к. } f \text{ д. у. ф.} \quad \uparrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

[3] $\forall P(x)$ - многочлен ф. $P(x) \cdot f(x)$ эв. д. ур-в. ф.

Док-во:

Будем проверять стр. 3: уел. 1 очевидно, условие 2 будем проверять, используя рав-во Лейбница: если $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(uv)' = u'v + uv'$
 $(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$

Многоиндексный вариант формулы Лейбница: если $u, v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и α - мультиин., то $\mathcal{D}^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} a_\beta (\mathcal{D}^\beta u) (\mathcal{D}^{\alpha-\beta} v)$

Проверим уел 2): $\forall \alpha, \gamma$ - мультиин.: $|x^\gamma \mathcal{D}^\alpha (P(x)f(x))| = |x^\gamma \sum_{\beta \leq \alpha} a_\beta (\mathcal{D}^\beta (P(x))) (\mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(x))| = |\sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\sigma \leq \beta} a_\beta b_\sigma x^{\gamma+\sigma} \mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(x)| \leq$
 $\sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\sigma \leq \beta} |a_\beta| \cdot |b_\sigma| \cdot |x^{\gamma+\sigma} \mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(x)| \leq \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 $\overset{\text{const on } \alpha, \beta, \gamma, \sigma}{\text{по 2 из стр 3}}$

Преобразование Фурье бистр. убыв. ф.

Опр. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - бистр. у. ф. Построим по f две новые ф.

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx, \quad *$$

(x,y) - скалярное произв. в $\mathbb{R}^n$: $(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

$$\check{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{+i(x,y)} dx \quad **$$

Правильное преобр. Фурье ф. f называют:

а) ф. $\hat{f}$, стр. по правилу *

б) правило (или отображ.) $\hat{f}_+$, которое каждой бистр. убыв. ф. f сопоставляет ф. $\hat{f}$ по пр. *, т.е. $\hat{f}_+[f(x)](y) = \hat{f}(y)$

Обр. преобр. Фурье ф. f называют:

а) ф. $\check{f}$, построенную по правилу (**)

б) правило $\check{f}_-$, которое каждой бистр. убыв. ф. f сопоставляет ф. $\check{f}$ по пр. (**), т.е. $\check{f}_-[f(x)](y) = \check{f}(y)$

Замечание 1. при $n=1$ формулы * и ** унас становятся
или в н. 2.5

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+ixy} dx$$

Замечание 2. Оба интегралы * и ** сходятся

$$|f(x) e^{\mp i(x,y)}| = |f(x)| \stackrel{\text{опр. 2}}{\leq} \frac{k_{0,p}}{1+|x|^p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Из леммы } \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1+|x|^p} < +\infty \quad \forall p > n$$

Св-ва преобр. Фурье д. у. ф. ($f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - д. у. ф.):

1) (линейное преобр. Фурье): $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \hat{f}_+[af+bg] = a\hat{f}_+[f] + b\hat{f}_+[g]$

Док-во.

$$\mathcal{F}_{\pm}[af+bg](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [af(x) + bg(x)] e^{\mp i(x,y)} dx =$$

$$= a(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx + b(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)} dx = a \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y) + b \mathcal{F}_{\pm}[g(x)](y)$$

$$2) \forall \alpha - \text{мультиинд.} \quad \mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)])$$

Доказ-во по инд.:

База: $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда

$\uparrow$
k-ое место

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y)) = \frac{\partial}{\partial y_k} \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_k y_k + \dots + x_n y_n)} dx_1 \dots dx_n \right) =$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{перенос под знака интеграла}}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} (\mp i x_k) dx = (\mp i)^{|\alpha|} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} x^{\alpha} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx =$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ |\alpha|=1 \\ x^{\alpha} = x_1^0 x_2^0 \dots x_k^1 \dots x_n^0}}{=} (\mp i)^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)](y) \quad ?$$

Шаг: Докажем, что 2) верно $\forall \alpha$ -мультиинд.: $|\alpha| \leq N$, где N - натуральное, что 2) верно $\forall \alpha$: $|\alpha| = N+1$. Для этого $\alpha \in \mathbb{N}$ -мультиинд.:

это 2) верно $\forall \alpha$: $|\alpha| = N+1$. Для этого $\alpha \in \mathbb{N}$ -мультиинд.:

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad |\beta| = N, \quad |\gamma| = 1. \quad \text{Тогда } \mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha} f(x)] = \mathcal{F}_{\pm}[x^{\gamma} (x^{\beta} f(x))] =$$

$$= (\pm i)^{|\gamma|} \mathcal{D}^{\gamma}(\mathcal{F}_{\pm}[x^{\beta} f(x)]) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{инд. предполож.}}}{=} (\pm i)^{|\gamma|} \mathcal{D}^{\gamma}((\pm i)^{|\beta|} \mathcal{D}^{\beta}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)])) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{База инд.}}}{=} (\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)])$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \beta + \gamma = \alpha}}{=} (\pm i)^{|\alpha|} \mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[f(x)])$$

$$3) \forall \alpha - \text{мультиинд.} \quad \mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^{\alpha} f(x)](y) = (\pm i y)^{\alpha} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y)$$

Доказ-во по инд.:

База: α -мультиинд. $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда

$\uparrow$
k-ое место

$$\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{D}^{\alpha} f(x)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_k y_k + \dots + x_n y_n)} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{\mp i(x_k y_k)} dx_k \right] e^{\mp i(y_1 x_1 + \dots + y_{k-1} x_{k-1} + y_{k+1} x_{k+1} + \dots + y_n x_n)} dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} (f e^{\mp i(x_k y_k)}) dx_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{\mp i(x_k y_k)} (\mp i y_k) dx_k \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{по лемме 2}}}{=} (\mp i y_k) \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{\mp i(x_k y_k)} dx_k$$

$$= \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx \right] \cdot \underset{(\pm iy)^\alpha}{(\pm iy)^\alpha} = (\pm iy)^\alpha \mathcal{F}_\pm[f(x)](y)$$

Указ: Допустим св-во 3) справедливо $\forall \alpha: |\alpha| \leq N$ и
 убедимся, что оно справедливо для всех $\alpha: |\alpha| = N+1$. Тогда $\exists \beta, \gamma$ -
 мультииндексы: $\alpha = \beta + \gamma$, $|\beta| = N$, $|\gamma| = 1$ и $\mathcal{F}_\pm[\mathcal{D}^\alpha f(x)](y) =$
 $= \mathcal{F}_\pm[\mathcal{D}^\gamma(\mathcal{D}^\beta f(x))](y) \underset{\text{дифф. инт.}}{=} (\pm iy)^\gamma \mathcal{F}_\pm[\mathcal{D}^\beta f(x)](y) \underset{\text{предполож. инт.}}{=} \\ = (\pm iy)^\gamma (\pm iy)^\beta \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \underset{\alpha = \gamma + \beta}{=} (\pm iy)^\alpha \mathcal{F}_\pm[f(x)](y).$

Замечание: Св-ва 2 и 3 можно формулировать так:

Преобр. Фурье переводит операцию умн. на независимую переменную
 в операцию дифференц. а тем самым до умножения на постоянный
 множитель и координат.

Вспомогательное: $\exp$ и $\ln$ переводят операции сложения
 и умножения друг в друга.

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$4.) \quad \mathcal{F}_\pm[f(x+x_0)](y) = e^{\pm i(y, x_0)} \cdot \mathcal{F}_\pm[f(x)](y), \text{ свойства:}$$

преобр. Фурье переводит сдвиг по арг. в сдвиг по фазе

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pm[f(x+x_0)](y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+x_0) e^{\mp i(x,y)} dx = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \underbrace{e^{\mp i(z-x_0,y)}}_{e^{\mp i(z,y)} \cdot e^{\pm i(x_0,y)}} dz = e^{\pm i(x_0,y)} \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \end{aligned}$$

$z = x + x_0$
 $dz = dx$

5.) Если $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то $\mathcal{F}_{\pm}[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](\frac{y}{a})$
 формула изменения масштаба.

Док-во:
$$\mathcal{F}_{\pm}[f(ax)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{\pm i(x,y)} dx =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\pm i(\frac{z}{a}, y)} dz \cdot \frac{1}{|a|^n} = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(x)](\frac{y}{a})$$

Упр. Докажите, что $(\pm iy)^{\alpha} = (\pm i)^{|\alpha|} y^{\alpha}$

6.) Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - д.у. ф., то $\mathcal{F}_{\pm}[f(x)]$ - тоже д.у. ф.

Док-во: Будем проверять опр. 3 д.у. ф.: $\varphi, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся д.у. ф., если

- 1) $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$
- 2) $\forall \alpha, \beta$ - мультииндексы. $\exists C_{\alpha, \beta} = \text{const} < +\infty$. $|x^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta} g(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \forall x \in \mathbb{R}^n$

Проверим 2.):

$$|y^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta} (\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y))| \stackrel{(1)}{=} |y^{\alpha} \mathcal{F}_{\pm}[x^{\beta} f(x)](y)| \stackrel{(2)}{=} |\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{D}^{\alpha}[x^{\beta} f(x)])(y)| =$$

$$= (2\pi)^{-(\frac{n}{2})} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\pm i(x,y)} dx \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \stackrel{\text{опр. 2 д.у. ф.}}{\leq} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{\alpha, \beta}}{1+|x|^p} dx < +\infty$$

 (здесь $K_{\alpha, \beta}$ - оценка $|x^{\beta} \mathcal{D}^{\alpha} f(x)|$, $p > n$)
 следовательно $C_{\alpha, \beta} \forall y \in \mathbb{R}^n$

7.) Формула обращения: $\mathcal{F}_{\pm}[\mathcal{F}_{\mp}[f]] = f$ для любой д.у. ф. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

Док-во: Для $n=1$ мы уже знаем эту формулу из п. 2.5. Далее - по индукции

Сначала шаг индукции для $n=2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$

$$\mathcal{F}_{+}[\mathcal{F}_{-}[f(x)](y)](z) = (2\pi)^{-1} \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} \left[(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{+i(x,y)} dx \right] e^{-i(y,z)} dy =$$

Изменим порядок интегрирования (теорема Фубини): $|f(x) e^{+i(x,y)} e^{-i(y,z)}| = |f(x)| \leq \frac{K}{1+|x|^p}$ интеграл от неё сходится

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{+ix_2 y_2} dx_2 \right] e^{-iy_2 z_2} dy_2 \right\} e^{ix_1 y_1} dx_1 \right) e^{-iy_1 z_1} dy_1 \equiv$$

[...] = ^{сфр.} одномерное префр. Фурье по x_2 , x_1 — параметр.

$$\{ \dots \} = \widehat{[\dots]} = f(x_1, x_2) = f(x_1, z_2)$$

↑
одномерная формула обращения

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, z_2) e^{+ix_1 y_1} dx_1 \right)}_{\text{сфр. Фурье, когда } z_2 \text{ — параметр.}} e^{-iy_1 z_1} dy_1 = f(z_1, z_2)$$

↑
одномерн. ф. обр.

2.9) Равенство Парсеваля

Теорема (равенство Парсеваля): Пусть $n \geq 1$; $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — д.у.ф.

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}_\pm[f](y)} \cdot \mathcal{F}_\pm[g(x)](y) dy$$

Док-во: I шаг Докажем, что $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\mathcal{F}_\pm[g(y)](x)} dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}_\pm[f(x)](y)} g(y) dy \quad \ominus$$

$$\ominus \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(x,y)} dy \right] dx \quad \ominus$$

меняем порядок интегр. (м. Фурье) $|f(x)g(y)e^{\mp i(x,y)}| = |f(x)| \cdot |g(y)| \leq \frac{\text{const}}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$

$$\ominus \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx \right]}_{\mathcal{F}_\pm[f(x)](y)} g(y) dy$$

II шаг $\overline{\mathcal{F}_\pm[f(x)](y)} = \mathcal{F}_\mp[\overline{f(x)}](y)$

$$\overline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{\pm i(x,y)} dx$$

III шаг Объединяем I и II шаг

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\mathcal{F}_{\pm}^{-1}[\mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y)](x)}_{\text{формула обращения}} \overline{g(x)} dx \stackrel{\text{I шаг}}{=} \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y) \mathcal{F}_{\pm}^{-1}[\overline{g(x)}](y) dy \stackrel{\text{II шаг}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y) \overline{\mathcal{F}_{\pm}[g(x)](y)} dy$$

Замечание 1 - Равенство Парсеваля аналогично равенству Лапунова для рядов Фурье

Например, $n=1$ и $f=g$. Тогда

$$\text{Равенство Парсеваля} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy \quad *, \quad \hat{f} \text{ называют спектром непрерыв. сигнала } f.$$

$$\text{Равенство Лапунова} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 (**), \quad \text{где } c_n - \text{коэф. Фурье } 2\pi\text{-период ф. } f. \text{ Число } 2\pi \text{ называют спектром период сигнала } f.$$

Тогда * и ** энергия сигнала f равняется энергии его спектра

Замечание 2 - Равенство Парсеваля было опубликовано в 1799

2.10 Действие св-ва преобр. Фурье

Опр. Пусть $n \geq 1$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - д.у. ф. Функция $f * g$, задаваемая формулой $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ называется свёрткой ф-ий f и g

Замечание 1 Интеграл из опр. свёртки, содержащийся: $|f(x-y)g(y)| \stackrel{\text{опр. 2 д.у. ф.}}{\leq} \leq \text{const} \cdot \frac{\text{Кор}}{1+|x|^p}$ - интеграл сходящийся, если $p > n$

Замечание 2 Свёртка полезна при решении дифф. ур., в т. вероятности, в т. обработки сигналов.

Св-ва свёртки д.у. ф. (здесь $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - д.у. ф.)

- 1) $f * g = g * f$ (коммутативность)
- 2) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (ассоциативность)

- 3) $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad (af + bg) * h = a(f * h) + b(g * h)$ (линейности по 1-му аргументу)
- 4) $\forall \alpha$ - мультипл. $\mathcal{D}^\alpha(f * g) = (\mathcal{D}^\alpha f) * g = f * (\mathcal{D}^\alpha g)$ (правило дифференцирования свертки)
- 5) $\mathcal{F}_\pm[f * g] = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\pm[f] \cdot \mathcal{F}_\pm[g]$
- 6) $\mathcal{F}_\pm[f \cdot g] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\pm[f] * \mathcal{F}_\pm[g]$

Упр. Доказать св-ва 1-4

Докажем 5:

$$\mathcal{F}_\pm[f * g](x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) e^{\mp i(x \cdot y)} dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) g(z) dz \right] e^{\mp i(x \cdot y)} dy$$

меняем порядок интегр.

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) g(z) e^{\mp i(x \cdot y)} dy - \text{св-ва, т.к. } |f(y-z) g(z) e^{\mp i(x \cdot y)}| \leq \frac{\text{const}}{(1+|y-z|)^p (1+|z|)^p}$$

- интегр. по $\mathbb{R}^{2n}$, если $p > 2$

Тогда по т. Фубини можно менять порядок

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) e^{\mp i(x \cdot y)} dy \right] g(z) dz &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x \cdot t)} dt \right] g(z) e^{\mp i(x \cdot z)} dz \\ &\quad \parallel \quad \text{замена } y-z=t \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x \cdot t+z)} dt \\ &\quad \parallel \quad \text{знаем преобр. Фурье} \\ &\quad e^{\mp i(x \cdot t)} \cdot e^{\mp i(x \cdot z)} \end{aligned}$$

$$= \cancel{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} \mathcal{F}_\pm[f](x) \int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{\mp i(x \cdot z)} dz = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\pm[f](x) \cdot \mathcal{F}_\pm[g](x)$$

Доказ-во св-ва 6 можно провести как и 5-ое, но сделаем по-другому:

применим 5-ое к правой части: $\mathcal{F}_\mp[\mathcal{F}_\pm[f] * \mathcal{F}_\pm[g]] = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\mp[\mathcal{F}_\pm[f]] \cdot \mathcal{F}_\mp[\mathcal{F}_\pm[g]] =$

$$\Rightarrow (2\pi)^{+\frac{n}{2}} f \cdot g$$

Применим к $(2\pi)^{+\frac{n}{2}} f \cdot g$ $\mathcal{F}_\pm$ и воспользуемся ф-лой обращения:

$$\boxed{\mathcal{F}_\pm[f] * \mathcal{F}_\pm[g] = (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\pm[f \cdot g]}$$

Замечание св-ва 5) и 6) показывают, что с точностью до преобр. Фурье и числового множителя свертка ф-ий соответствует умножению ф-ий
 Например, есть $\ln$: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

Теорема. Формула Пуассона (без док-ва)
 $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - д.у. ф. имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$

Теорема. Формула Карлемана-Шеннона (без док-ва)
 Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - д.у. ф. такая, что $\exists a > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x| > a \Rightarrow \hat{f}(x) = 0$
 Тогда $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{\pi n}{a}\right) \operatorname{sinc}\left[a\left(x - \frac{\pi n}{a}\right)\right]$, где $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}, x = \frac{\pi n}{a}$ - т. отсчета

Замечание все св-ва п. 2.10 являются мат. основой теории передачи информации

§3 Преобразование Лапласа

3.1 Опр. и св-ва

Опр. 1 ф. $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ наз. функцией, если:

- 1) ф. f непр. на $[0, +\infty)$ ввиду, за нек. конечного числа m .
- 2) сущ. такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$

Опр. 2 Пусть f - функция. Тогда число $\inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \right\}$ наз-ся показателем роста ф. f и обозн. $\alpha(f)$

Замечание. Мн-во $\left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \right\}$ непусто (если f - функция) и явл. интервалом в $\mathbb{R}$, у которого пр. концу $+\infty$, а левый - любой.
 Это так потому, что если α принадлежит этому интервалу, то и любое $\beta > \alpha$ точно принадлежит этому интервалу: $\beta > \alpha \Rightarrow e^{-\beta t} < e^{-\alpha t} \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt < \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$. Для таких интервалов $\inf =$ = левому концу (концу может не принадлежать интервалу)

Для нас важно: $\forall \varepsilon > 0$ для $\alpha = \alpha(f) + \varepsilon \quad \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$