

Замечание св-ва 5) и 6) показывают, что с точностью до преобр. Фурье и числового множителя свертка ф-ий соответствует умножению ф-ий
 Например, есть $\ln$: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

Теорема. Формула Пуассона (без док-ва)
 $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ -д.у. ф. имеем $\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$

Теорема. Формула Котельникова-Шеннона (без док-ва)
 Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ -д.у. ф. такая, что $\exists a > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x| > a \hat{f}(x) = 0$
 Тогда $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{\pi n}{a}) \operatorname{sinc}[a(x - \frac{\pi n}{a})]$, где $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}, x = \frac{\pi n}{a}$ - т. отсчета

Замечание все св-ва п.2.10 являются мат. основой теории передачи сигнала

§3 Преобразование Лапласа

3.1 Опр. и экв. св-ва

Опр.1 ф. $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ наз. функцией, если:

- 1) ф. f непр. на $[0, +\infty)$ всюду, за искл. конечного числа т.
- 2) сущ. такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$

Опр.2 Пусть f -функция. Тогда число $\inf \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \}$ наз-ся показателем роста ф. f и обозн. $\alpha(f)$

Замечание. Мн-во $\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \}$ непусто (если f -функция) и явл. интервалом в $\mathbb{R}$, у которого пр. концы $+\infty$, а левый - конечн.

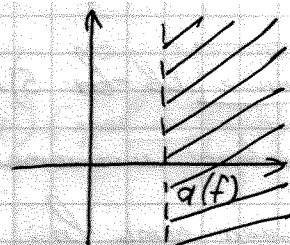
Это так потому, что если α принадлежит этому интервалу, то и всякое $\beta > \alpha$ также принадлежит этому интервалу: $\beta > \alpha \Rightarrow e^{-\beta t} < e^{-\alpha t} \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$. Для таких интервалов $\inf =$ = левому концу (концу может не принадлежать интервалу)

Для нас важно. $\forall \varepsilon > 0$ для $\alpha = \alpha(f) + \varepsilon \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty$

Опр 3. Пусть f -оригинал $\forall p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a(f)$

положим $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$. При этом имеем,

что ф-я $F(p)$ явл. преобр. Лапласа от ф-и $f(t)$, орг. в $[0, +\infty)$



Обозн. $\mathcal{L} \{ \overset{\text{оригинал}}{f(t)} \} (p) = \overset{\text{изображение}}{F(p)}$
 $f(t) \doteq F(p)$

Замечание. В формуле-те интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ со-ср., т.е.

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-pt}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-(\operatorname{Re} p)t} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha f(t)t} dt < +\infty$$

$$|e^{-(\operatorname{Re} p)t}| \cdot |e^{-i(\operatorname{Im} p)t}| = e^{-(\operatorname{Re} p)t}$$

Эти св-ва верны, если суц. все преобр. Лапласа, входящие в них

↓
 Св-ва преобразования Лапласа (f, g -оригиналы)

1) Линейность: $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \mathcal{L} \{ af + bg \} = a \mathcal{L} \{ f \} + b \mathcal{L} \{ g \}$

Доказ-во: $\mathcal{L} \{ af + bg \} = \int_0^{+\infty} [af(t) + bg(t)] e^{-pt} dt = a \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + b \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt =$
 $a \mathcal{L} \{ f \}(p) + b \mathcal{L} \{ g \}(p)$

2) III. сдвиг: $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеем $\mathcal{L} \{ e^{-\alpha t} f(t) \}(p) = \mathcal{L} \{ f(t) \}(p + \alpha)$

Доказ-во: $\mathcal{L} \{ e^{-\alpha t} f(t) \}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+\alpha)t} dt = \mathcal{L} \{ f(t) \}(p + \alpha)$

3) III. масштаб: $\forall \alpha > 0$ имеем $\mathcal{L} \{ f(\alpha t) \}(p) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L} \{ f(t) \}(\frac{p}{\alpha})$

Доказ-во: $\mathcal{L} \{ f(\alpha t) \}(p) = \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt \stackrel{x = \alpha t}{=} \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{p}{\alpha} x} dx = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L} \{ f(t) \}(\frac{p}{\alpha})$

4) (Теорема о дифференцировании оригинала) Пусть $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} p > a(f)$, $\operatorname{Re} p > a(f')$, где f -оригинал такой, что f' тоже оригинал. Тогда

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \}(p) = p \mathcal{L} \{ f(t) \}(p) - f(0).$$

Доказ-во: $\mathcal{L} \{ f'(t) \}(p) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt \stackrel{\text{по частям}}{=} \left. f(t) e^{-pt} \right|_{t=0}^{t=+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt =$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) e^{-pt} + p \mathcal{L} \{ f(t) \}(p)$
 м.е. несомн. имт.

f' -ограничен $\Rightarrow$ ф. f дифференцируема в каждой т. интервала $[0, +\infty) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ дифференцируема в 0 $\Rightarrow$ из мат. анализа: дифференцируемость влечёт непрерывность $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = f(0)$; Из мат. анализа $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) e^{-pt} = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-pt} =$
 $= f(0) \cdot e^0 = f(0)$

$$a.) : \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t) e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} | [f(0) + \int_0^t f'(s) ds] e^{-pt} | \leq$$

$$\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} | [f(0) e^{-pt}] | + \lim_{t \rightarrow +\infty} | \int_0^t f'(s) ds | e^{-pt} \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(0)| \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\text{Rep})t}}_0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\text{Rep})t} e^{At} \cdot e^{-At} \int_0^t |f'(s)| ds \quad \text{Выберем } A: 0 < A < \text{Rep} \ \&\& \ A > a(f')$$

$$\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-[\text{Rep} - A] t} \cdot \int_0^t |f'(s)| e^{-As} ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-[\text{Rep} - A] t} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |f'(s)| e^{-As} ds$$

$0 < s < t \Rightarrow 0 < As < At$
 $0 > -As > -At \Rightarrow e^{-As} > e^{-At}$

$$\leq 0 \cdot \int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-As} ds = 0$$

$+\infty, \text{ так } A > a(f')$

3.2 Преобразование Лапласа для решения дифференциальных уравнений

$$5.) \mathcal{L} \{ f^{(n)}(t) \}(p) = p^n \mathcal{L} \{ f(t) \}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Док-во будем вести по индукции:

База уже доказана в св-ве 4.)

Шаг индукции: допустим, что для некоторого n св-во 5.) верно

Докажем для $n+1$:

$$\mathcal{L} \{ f^{(n+1)} \}(p) = \mathcal{L} \{ (f')^{(n)} \}(p) = p \mathcal{L} \{ f' \}(p) - p^n f'(0) - \dots - p f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$$

$$= p [p^n \mathcal{L} \{ f \}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)] - p^n f'(0) - \dots - p f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} a_0 y''(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \\ y(0) = c_0 \\ y'(0) = c_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{cases}$$

Предположим, что $f(t)$ - оригинал и будем искать решение $y(t)$, которое тоже был оригиналом: Обозн. $\mathcal{L}\{f\} = F$, $\mathcal{L}\{y\} = Y$

Применим преобр. Лапласа и используем 5.):

$$a_0(p^n Y(p) - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \dots - pc_{n-2} - c_{n-1}) + a_1(p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}c_0 - \dots - pc_{n-3} - c_{n-2}) + \dots + a_{n-1}(pY(p) - c_0) + a_n Y(p) = F(p)$$

$$R(p)Y(p) - T(p) = F(p) \quad R(p), T(p) - \text{интегралы}$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + T(p)}{R(p)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$$

(3.3) Дальнейшие св-ва преобр. Лапласа

б.) (Аналитичность изображения). Функция $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$ - эв. аналит. функцией от z в полуплоскости $\text{Re } z > \alpha(f)$

Угол доп-ва: Из ТФКП $\Rightarrow$ ф. $F(z)$ эв. аналит $\Leftrightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(z+t) - F(z)}{t} = F'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} \Leftrightarrow$ выполняется условие Коши - Римана

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{оп.}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{-zt}}_{=0, \text{ т.к. } e^{-zt} - \text{аналит. ф.}} dt = 0 \Rightarrow F - \text{аналит. ф.}$$

Замечание Уточним стр. преобр. Лапласа: преобр. Лапласа эв. аналит. продолжение аналит. ф. $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$, определённое в $\text{Re } z > \alpha(f)$

г.) (Формула обращения): Пусть $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ - оригинал, пусть f эв. кус-л., непр. ф. и $f(0) = 0$. Тогда

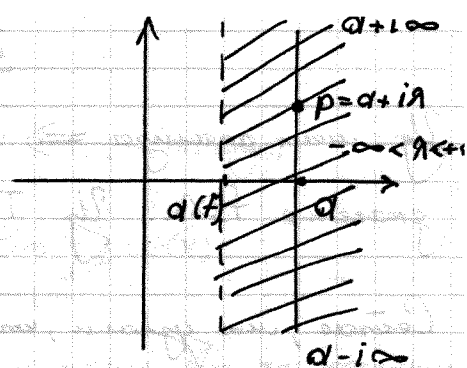
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) \stackrel{\text{формула Меллина}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \text{ где } F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > \alpha(f), p \in \mathbb{C}, \text{Re } p > \alpha(f)$$

интеграл Брайевича

Док-во.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{e^{-(\alpha+i\eta)t}}_{e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\eta t}} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{\frac{f_+(t)}{\sqrt{2\pi}}} e^{-i\eta t} dt, \quad \ominus$$

где $f_+(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \cdot f(t) e^{-\alpha t}, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$



$\ominus \mathcal{F}_+ [f_+(t)](\eta)$ Применим формулу обращения для преобр. Фурье.

$$f_+(t) = \mathcal{F}_- [\mathcal{F}_+ [f_+(t)](\eta)](t) = \mathcal{F}_- [F(p)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha+i\eta) e^{i\eta t} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{(\alpha+i\eta)t} e^{-\alpha t} \frac{dp}{i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha t} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad \text{Тогда } t > 0:$$

$$\sqrt{2\pi} f(t) e^{-\alpha t} = \frac{e^{-\alpha t}}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad \square$$

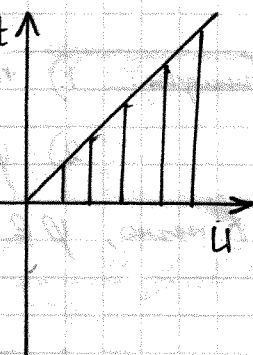
Опр. Пусть f, g - функции. Тогда новое $f * g$, определяемая формулой: $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du$ называется сверткой f и g .

Замечание. Если считать, что оригиналы f и g определены на $(-\infty, +\infty)$, но равны нулю на $(-\infty, 0)$, то это определ. совпадает с определ. свертки из темы преобр. Фурье: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) du$

8.) (Теорема Боуэля). Если f и g - оригиналы, то $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$

Док-во:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(t-u) g(u) du \right] e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_u^{+\infty} f(t-u) e^{-pt} dt \right] g(u) du = \int_0^{+\infty} \left[\int_{x=t-u}^{+\infty} f(x) e^{-p(x+u)} dx \right] g(u) du = \\ &= \int_0^{+\infty} [\mathcal{L}\{f(x)\}](p) g(u) e^{-pu} du = \mathcal{L}\{f(x)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{g(u)\}(p) \end{aligned}$$



9.) (Формула Дирака): $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f * g)\right\}(p) = p \mathcal{L}\{f * g\} - (f * g)(0)$

Док-во. 4 $\Rightarrow \mathcal{L}\{f'\}(p) = p \mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$. Значит

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f * g)\right\} \stackrel{4)}{=} p \mathcal{L}\{f * g\} - (f * g)(0) \stackrel{9)}{=} p \mathcal{L}\{f\}(p) \cdot \mathcal{L}\{g\}(p) \quad \square$$