

§4 Обобщённые функции

Уз мат. анализа $\Rightarrow$ фр. f сопоставляет аргументу x единственное значение $f(x)$. Уз ТФКП $\Rightarrow$ бывают многозначные фр., напр. $\ln(z)$

Сейчас, мы узнали, что обобщённая фр. вообще не имеет значения в т., напр. $\delta(x)$

4.1 Простые функции

Главное опр. Пусть $n \geq 1$, G - область в $\mathbb{R}^n$. Функция $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ называется простой (или сепаратой), если выполнено:

i) $\varphi \in C^\infty(G)$;

ii) $\text{supp } \varphi \stackrel{\text{опр}}{=} \text{cl } \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}$ - носитель фр. φ содержится в обл. G и эвн. опр. или-во.

Напоминания: 1. область - открытое связное мн-во

2. открытое мн-во - если X - т. мн-во, то $\exists \varepsilon > 0$: шар с радиусом ε центром в т.х содержится в этом мн-ве

3. связное - любые две т. мн-ва можно соединить непр. кривой, которая целиком лежит в мн-ве.

4. $\text{cl} \stackrel{\text{def}}{=} \text{замыкание}$ мн-ва - объединение мн-ва и всех его предельных т.

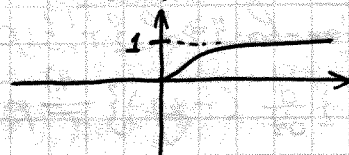
5. предельная т. - x эвн. пред. т. мн-ва G , если $\exists x_1, \dots, x_n, \dots$ такая, что $\forall n \ x_n \in G$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\forall n \ x_n \neq x$

Примеры: 1) $n=1$, $G=(0,1)$, $\text{cl } G=[0,1]$

2) $\varphi: (0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ и задаётся формулой $\varphi(x)=1 \ \forall x \in (0,1)$

Конечно, $\varphi \in C^\infty(0,1)$. Но φ не эвн. простой, т.к. $\text{supp } \varphi = \text{cl } (0,1) = [0,1]$

3) Пусть $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой $\omega(x) = \begin{cases} x(0,1) \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } \leq 0 \end{cases}$



Из мат. анализа $\Rightarrow w \in C^\infty(\mathbb{R})$

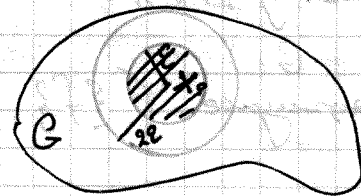
Это следует из того, что $\forall k > 1 \quad \frac{d^k}{dx^k} w(x) = p_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \quad \forall x > 0$ (по инд.)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{d^k}{dx^k} w(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{d^k}{dx^k} w(x)$$

Пусть G -обл. в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in G$, $\varepsilon > 0$: шар радиуса 2ε с центром в т. x_0 содержится в G . Тогда ф. $w_{x_0, \varepsilon}: G \rightarrow \mathbb{R}$ опр. функцией $w_{x_0, \varepsilon}(x) = w(\frac{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}{\varepsilon^2})$

эв. пробной в G . Почему? $w_{x_0, \varepsilon} \in C^\infty(G)$ т.к. она эв. суперпозицией аргумент ф. w ф. C^∞ -ф. w и $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2 = \varepsilon^2 - \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2$
 $(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1^0, \dots, x_n^0)$

при этом если $x: |x - x_0| > \varepsilon$, то $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2 < 0$ значит, для таких $x \quad w_{x_0, \varepsilon}(x) = 0 \Rightarrow \text{supp } w_{x_0, \varepsilon} \subset \{x \in G: |x - x_0| \leq \varepsilon\} \subset B(x_0, 2\varepsilon) \subset G$



Утверждение Если $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ пробные ф., то $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad af + bg$ эв. пробной

Док-во: $af + bg \in C^\infty(G)$ - очевидно

$$\text{supp}(af + bg) \subset (\text{supp } f) \cup (\text{supp } g) \subset G$$

Следствие: Совокупность всех пробных ф. в обл. G образует лин. пр-во. Это пр-во пробных ф. обозн. $\mathcal{D}(G)$

4.2 Пр-во обобщенных функций

Опр. Пусть $n \geq 1$ и G -обл. в $\mathbb{R}^n$. Любой линейный неупр. функционал $F: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ наз-ся обобщ. ф. в обл. G

Обзн. Результат действия F на φ обозн. $F(\varphi)$ или (F, φ)

$\mathcal{D}'(G)$ - лн-во всех обобщ. ф. в обл. G лнн. неупр. функционалов в обл. G .

Напоминание: функционал - отображение в лн-во чисел

$$\text{линейный функционал} - F(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aF(\varphi_1) + bF(\varphi_2) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(G)$$

$$\text{неупр. функционал} - \lim_{k \rightarrow \infty} F(\varphi_k) = F(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k), \text{ т.е. если } \varphi_k \rightarrow \varphi$$

$$\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{D}(G) \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi, \text{ то } \lim_{k \rightarrow \infty} F(\varphi_k) = F(\varphi)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$ или $\varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(G) \iff \forall \alpha$ -умнож. и $\forall$

опр. замкнутого лн. $Q \subset G$ $\mathcal{D}\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\forall Q} \mathcal{D}\varphi$, т.е. $\sup_{x \in Q} |\mathcal{D}\varphi_k(x) - \mathcal{D}\varphi(x)| \rightarrow 0$ $k \rightarrow \infty$

Замечание. Если лн. функционал $F \in \mathcal{D}'(G)$ определён для любой ф. $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ и задан явной формулой, то F -непр.

Замечание. Лн-во всех обобщённых ф. $\mathcal{D}'(G)$ явл. лн. пр-ви:
 $(aF_1 + bF_2, \varphi) \stackrel{\text{опр}}{=} aF_1(\varphi) + bF_2(\varphi)$

4.3 Примеры обобщённых ф.

1.) (Регулярные обобщ. ф.): Пусть G -обл. в $\mathbb{R}^n$, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ -адс. интегр. ф., т.е. $\int_G |f(x)| dx < +\infty$. Построим по f обобщ. ф. $\{f\} \in \mathcal{D}'(G)$ по формуле $(\{f\}, \varphi) \stackrel{\text{опр}}{=} \int_G f(x) \varphi(x) dx$ (*)

Почему интеграл в (*) сходится?

$$\left| \int_G f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_G f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \quad \text{supp } \varphi$$

supp φ -опр. замк. лн., по т. Вейерштрасса для любой непр. ф. $\varphi(x)$ или $|\varphi(x)| \exists x_0 \in \text{supp } \varphi: |\varphi(x)| \leq |\varphi(x_0)| = \text{const} < +\infty$

$$\leq |\varphi(x_0)| \int_G |f(x)| dx < +\infty = |\varphi(x_0)| \int_G |f(x)| dx < +\infty$$

Функционал заданный (*) линеен в силу линейности интеграла. Образует ли лн. пр-во?

$$\begin{aligned} (\{af_1 + bf_2\}, \varphi) &= \int_G (af_1(x) + bf_2(x)) \varphi(x) dx = a \int_G f_1(x) \varphi(x) dx + b \int_G f_2(x) \varphi(x) dx = \\ &= a(\{f_1\}, \varphi) + b(\{f_2\}, \varphi) = (a\{f_1\} + b\{f_2\}, \varphi) \Rightarrow \{af_1 + bf_2\} = a\{f_1\} + b\{f_2\} \end{aligned}$$

Почему функционал (*) непр.? В силу замечания. Но можно и доказать, воспользовавшись теоремой о переходе предела под знаком интеграла.

Опр. Общ. ф-ия, которая не явл. регулярной, называется сингулярной

2.) (Дельта ф. Дирака) $(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), n \geq 1$

Почему δ линейна? $(\delta, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0) = a(\delta, \varphi_1) + b(\delta, \varphi_2)$

Почему δ непр.? По замечанию. Можно док-ать по отр.: возьмём

$\alpha = 0, Q = \{0\} \quad |(\delta, \varphi) - (\delta, \varphi_k)| = |\varphi(0) - \varphi_k(0)| \leq \sup_{x \in Q} |\varphi(x) - \varphi_k(x)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow (\delta, \varphi_k) \rightarrow (\delta, \varphi)$
 $\downarrow$
 δ - непр.

Замечание. Из физики $\Rightarrow \delta$ -фр.: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$\delta(x) = 0$, если $x \neq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ или $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Из математики $\Rightarrow$ такой ф. $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не сущ.

3.) $(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$

4.) $(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$

Замечание $\delta, \mathcal{P}\frac{1}{x}, \frac{1}{x \pm i0}$ явл. сингулярными общ. фр.

(4.4) Формулу Сохоцкого

Теорема (формула Сохоцкого) $\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$

Док-во: Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - пробная ф. Тогда $\exists 0 < R < +\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R}: |x| > R \quad \varphi(x) = 0$. Тогда

$(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx =$

$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{\varphi(0) dx}{x \pm i\varepsilon} =$

$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_1 + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_2$, где $I_2 = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx$; $I_2 = \int_{-R}^R \frac{dx}{x \pm i\varepsilon}$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_1 \stackrel{?}{=} \int_{-R}^R \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right] dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \quad (\equiv)$
 $\uparrow$
 переход к пределу по ε
 $\forall \alpha > 0 \quad (R+\alpha) \quad \frac{\varphi(x)}{x}$ - рег. фр.

$$\equiv \int_{-(R+a)}^{-R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_R^{R+a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-(R+a)}^{R+a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx =$$

взаимно уничтожились

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \left[\int_{-(R+a)}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R+a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx \right] + \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx =$$

т.к. $\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \right| \leq \text{const}$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \int_{-(R+a)}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R+a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = (\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi)$$

ф. принимает максимум и минимум на компакте

Можно ли было переходить к пределу под знаком интеграла?

Из леммы $\Rightarrow$ можно, если у $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}$ есть интегр. мажоранта, т.е. если суш. ф. $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leq \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx < +\infty$

Найдём $\psi: |x+i\varepsilon| > |x| \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{x+i\varepsilon} \right| < \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leq \psi(x)$$

Положим $\psi(x) = \begin{cases} \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|} & \forall x \neq 0 \\ |\varphi'(0)|, & \text{если } x=0 \end{cases}$

в т. $x=0$ определим ψ по непрерывности, т.е. положим $\psi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \right| = |\varphi'(0)|$$

Почему выполняется * и в т. $x=0$? Потому, что в * слева и справа стоят непр. ф. и неравенство выполняется $\forall x \neq 0$. Значит, оно выполняется и для $x=0$. Значит ψ — мажоранта, при этом интегр

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{dx}{x \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{\varepsilon dx}{x^2 + \varepsilon^2} =$$

$$= \mp i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-R}^R \frac{d(\frac{x}{\varepsilon})}{(\frac{x}{\varepsilon})^2 + 1} = \mp i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[2 \arctg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]_{-R}^R = \mp 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arctg\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \mp 2i \frac{\pi}{2} = \mp \pi i$$

$$(p_{\tilde{x}}, \varphi) \mp i\pi \varphi(0) = (p_{\tilde{x}}, \varphi) + (\mp i\pi \delta, \varphi) = (p_{\tilde{x}} \mp i\pi \delta, \varphi)$$

4.5 Сходимость обобщённых функций
и $\mathcal{D}$ -образная посыл-ть

Наводящие сообра. Пусть $n \geq 1$, G -обл. в $\mathbb{R}^n$ и $f, f_1, \dots, f_k, \dots$ абс. интегр. ф-ы $G \rightarrow \mathbb{R}$, причём $f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x) \quad \forall x \in G$ - поточечн. с-ть.

$$\text{Тогда } (\{f_k\}, \varphi) = \int_G f_k(x) \varphi(x) dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_G f(x) \varphi(x) dx = (\{f\}, \varphi).$$

Опр. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$ и $F_1, \dots, F_k, \dots \in \mathcal{D}'(G)$

Говорят, что посыл-ть обобщ. ф-ы $F_1, \dots, F_k, \dots$ с-ся к обобщ. ф-е $F \in \mathcal{D}'(G)$ если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ имеем $(F_k, \varphi) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (F, \varphi)$ (т.е. посыл-ть $\xrightarrow[k \rightarrow \infty]$ к знач.

Обозн. $F_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \in \mathcal{D}'(G)$ или $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \in \mathcal{D}'(G)$

Примеры Из стр. обобщ. ф-ы $\frac{1}{x \pm i0}$ из п. 4.3 имеем

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim \left\{ \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \right\} \in \mathcal{D}'(G)$$

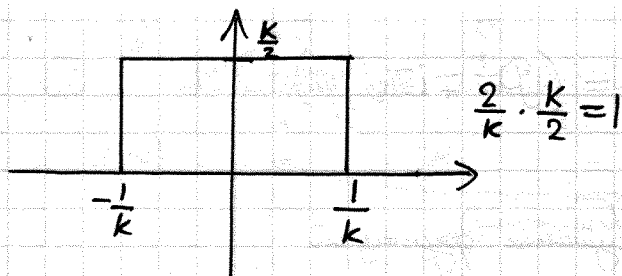
Опр. Говорят, что посыл-ть функций $h_1, \dots, h_k, \dots$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ со значениями в $\mathbb{R}$, является $\mathcal{D}$ -образной посыл-тью, если выполнены след. условия:

(i) $\forall k \quad h_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\forall k \quad \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx = 1$

(iii) $\forall k \quad \exists \varepsilon_k > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n$, где к-т. $|x| > \varepsilon_k$, имеем $h_k(x) = 0$,
причём $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$

Пример 1. $n=1, G=\mathbb{R}, \quad h_k = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{если } |x| < \frac{1}{k} \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{1}{k} \end{cases}, \quad \varepsilon_k = \frac{1}{k}$



Пример 2. $n \geq 1$, $G = \mathbb{R}^n$, $h_k(x) = \frac{\omega_{0, \frac{1}{k}}(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{0, \frac{1}{k}}(y) dy}$, где $\omega_{0, \varepsilon}(x)$ — ф. из п. 4.1,

которая бесконечно дифференцируема и $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{0, \varepsilon}(x) dx = 1$. (ii) выполняется, т.к.

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{0, \frac{1}{k}}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{0, \frac{1}{k}}(y) dy} = 1, \quad \text{(iii) выполняется с } \varepsilon_k = \frac{1}{k}.$$

Итаки, из мат. анализа $\Rightarrow$ Вторая т. о среднем: Пусть $n \geq 1$, B — шар и $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная. Тогда $\exists x_0 \in B$:

$$\int_B f(x)g(x) dx = f(x_0) \int_B g(x) dx$$

Теорема (о с.-ти δ -образной посл.): Пусть $n \geq 1$ и $h_1, \dots, h_k, \dots$ — δ -образная посл. в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \{h_k\} = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Док-во: Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(\lim_{k \rightarrow \infty} \{h_k\}, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\{h_k\}, \varphi) =$
 $= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq \varepsilon_k} h_k(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{вторая т. о среднем} \Rightarrow \exists x_k: |x_k| < \varepsilon_k}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{|x| \leq \varepsilon_k} h_k(x) dx \stackrel{\text{(iii)}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx =$

$= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$. Т.к. две обобщ. ф. одинаково действуют на любую пробную ф., то они равны. $\square$

Замечание. Из этой теоремы $\Rightarrow$ δ -ф. есть плотность распредел. массы тела, которое имеет общую массу 1 и сосредоточено в т. $x=0$

(4.6) Замена переменной в абст. ф-е.

Наблюдение соотв.: Пусть $n \geq 1$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - абст. интегр. ф., $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - невырожд. лн. отобр., $b \in \mathbb{R}^n$. Тогда:

$$\begin{aligned} (\{f(Ax+b)\}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(A^{-1}(y-b)) \frac{dy}{|\det A|} = \\ &= \left(\{f\}, \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|} \right)_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

↑ замена $y = Ax+b$
 $x = A^{-1}(y-b)$, $dy = |\det A| dx$

Опр. Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - невырожд. лн. преобр. $b \in \mathbb{R}^n$. Тогда символом $F(Ax+b)$ обозн абст. ф., которая действует на любую пробную ф-у $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(F(Ax+b), \varphi(x)) = (F(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|})$$

Пример 1. $\delta(-x) = \delta(x)$. Здесь $n \geq 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$, $b = 0$. Поэтому

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \frac{\varphi(-y)}{|(-1)^n|}) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

Пример 2. (сдвинутое δ -ф-е) $(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$

Здесь $A = E$, $b = -x_0 \Rightarrow (\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (\delta(y), \frac{\varphi(y+x_0)}{1}) = \varphi(x_0)$

(4.7) Умножение абстрактных ф-ий

Набл. соотв.: Пусть $n \geq 1$, G - обл. в $\mathbb{R}^n$, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ - абст. интегр., $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ - бекс дифф-ия. Тогда $(\{af\}, \varphi) = \int_G \underbrace{a(x)f(x)}_{\text{пробная ф.}} \varphi(x) dx = (\{f\}, a\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Опр. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$, $a \in C^\infty(G)$. Тогда через aF мы обозн. новую абст. ф., которая действует на любую пробную ф-у φ по правилу $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$. При этом aF является результатом умножения F на a .

Пример 1. $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

Док-во: $(a(x)\delta(x), \varphi(x)) \stackrel{\text{опр}}{=} (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0) \cdot (\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), n \geq 1$

Пример 2. $x \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$

Док-во: $(x \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x)) \stackrel{\text{опр}}{=} (\mathcal{P} \frac{1}{x}, x\varphi(x)) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = (\{1\}, \varphi)$

Замечание. Нужно определить операцию умн. любой свобод. ф. так, чтобы

- 1) она была коммутативна
- 2) она была ассоциативна
- 3) она совпадала с ранее введённой опер. умножения на C^∞ -ф.

Док-во: От противного: пусть суц. операция умн. со св-ами 1-3.

Тогда вычислим $(x\delta(x)) \mathcal{P} \frac{1}{x} = 0 \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} = \{0\}$
 $\parallel \textcircled{1}$
 $(\delta(x) \cdot x) \mathcal{P} \frac{1}{x} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \delta(x)(x \mathcal{P} \frac{1}{x}) = \delta(x)$ ← противоречие

4.8 Дифференцирование свобод. ф.

Навод. соотношения: Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. дифф. ф., $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Тогда $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (\{f'\}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx = \left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) dx \in$

$\equiv -(\{f\}, \varphi'(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\varphi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\varphi(x) = 0$$

Опр Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$, G -обл. в $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, α -мулт.

Тогда через $\mathcal{D}^\alpha F$ мы обозн. новую свобод. ф. в G , которая действует на любую пробн. ф. φ по ф-ле $(\mathcal{D}^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (F, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$.

При этом $\mathcal{D}^\alpha F$ назыв. α -произв. от F .

Пример 1. $(\delta'(x), \varphi(x)) \stackrel{\text{опр}}{=} -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Пример 2. Пусть $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

$(\{H(x)\}', \varphi) \stackrel{\text{опр}}{=} -(\{H(x)\}, \varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi)$
 $\{H\}' \stackrel{\text{опр}}{=} \delta$

Опр. $[f]_x = f(x+0) - f(x-0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x+h) - \lim_{h \rightarrow +0} f(x-h)$
 скачок кусочно-гл. ф. в т.х.

Лемма (об д-ва) (о связи классической и обобщ. кусочно-гл. ф.)

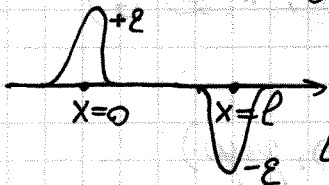
Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - к-гл. ф. и пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ - все т. излома или разрыва ф. f . Тогда

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x-x_k)$$

Пример 3. (об д-ва). Если $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой $f(x,y,z) =$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \text{ то } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \delta(x,y,z), \text{ т.е. } \Delta f = \delta$$

Пример 4. (Треугольная δ -ф. как плотность распр. заряда эл. диполя)



$p = \varepsilon l$ - дипольный момент
 $\lim_{l \rightarrow +0} (\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l), \varphi(x)) = \lim_{l \rightarrow +0} (\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l), \varphi(x))$
 $p = \varepsilon l = \text{const}$

$\lim_{l \rightarrow +0} (\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l), \varphi(x)) = \lim_{l \rightarrow +0} (\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-l), \varphi(x))$
 $p = \varepsilon l = \text{const}$

$$= \lim_{l \rightarrow +0} [\varepsilon \varphi(0) - \varepsilon \varphi(l)] = -\lim_{l \rightarrow +0} \varepsilon \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{l} = -p \varphi'(0) \stackrel{\text{пр.1.}}{=} (p \delta'(x), \varphi(x))$$

Зпр. $\forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеем $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

4.9 Свёртка обобщённых ф.

Лемма. соопр. Пусть f, g - д-г. ф. в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(\{f * g\}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy \right] \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
коммутативность
свёртки

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \varphi(x) dx \right] f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(z) \varphi(y+z) dz \right] f(y) dy =$$

$\uparrow$
поменя
порядок интегр.
 $x-y=z$

$$= (\{f(y)\}, (\{g(z)\}, \varphi(y+z)))$$

Опр. Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда на свёртке $F * G$ назовем новую обобщ. ф., которая действует на пробн. ф. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(F * G, \varphi) = (F(y), (G(z), \varphi(y+z)))$$

Замечание. Свёртка определена не всегда. Она обязательно ^{для любой F} определена, если $y \mapsto (G(z), \varphi(y+z))$ эвн. пробной. Но даже если * не эвн. пробной, то для некоторой F свёртка $F * G$ может быть определена.

Свойства свёртки (здесь $F, G, F_1, F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), n \geq 1$):

$$1.) F * \delta = F$$

$$2.) \forall a, b \in \mathbb{C} \quad (aF_1 + bF_2) * G = a(F_1 * G) + b(F_2 * G)$$

$$3.) F * G = G * F$$

$$4.) \forall \alpha \text{ - мультиин.} \quad \mathcal{D}^\alpha (F * G) = (\mathcal{D}^\alpha F) * G = F * (\mathcal{D}^\alpha G)$$

Док-во:

$$\textcircled{1} (F * \delta, \varphi) \stackrel{\text{опр}}{=} (F(y), (\delta(z), \varphi(y+z))) = (F(y), \varphi(y))$$

Замечание Свёртка не ассоциативна, т.е. равенство $(F_1 * F_2) * G = F_1 * (F_2 * G)$ выполняется не всегда.

$$(\{1\} * \delta') * \{H\} \stackrel{!}{=} (\{1\} * \delta') * \{H\} \stackrel{!}{=} \{1\}' * \{H\} = 0 * \{H\} = \{0\}$$

$$\{1\} * (\delta' * \{H\}) \stackrel{!}{=} \{1\} * (\delta' * \{H\}') = \{1\} * (\delta * \delta) \stackrel{!}{=} \{1\} * \delta \stackrel{!}{=} \{1\}$$

4.10 Преобразование Фурье от обобщ. ф.

Навед. соопр.: Пусть f - обобщ. ф. в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\mathcal{F}_\pm[f(x)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)} dx. \text{ Значит}$$

$$(\{\mathcal{F}_\pm[f(x)](y)\}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \varphi(y) dy \stackrel{!}{=}$$

из равенства Парсеваля п. 2.9 (шаг I) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}_\pm[\varphi(y)](x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x) dx = (\{f\}, \mathcal{F}_{\pm}[\varphi])$$

Опр. $\forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad (\mathcal{F}_{\pm}[F], \varphi) = (F, \mathcal{F}_{\pm}[\varphi])$

Замечание. Все св-ва преобр. Фурье для д.у. ф. из п.2.8 и п.2.10 справедливы для обобщ. ф.