5.) Если $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то $\mathcal{F}_\pm[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](\frac{y}{a})$

формула изменения масштаба.

Док-во: $\mathcal{F}_\pm[f(ax)](y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{\mp i(x,y)} dx \underset{\substack{ax=z \\ |a|^n dx = dz}}{=}$

$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\mp i(\frac{z}{a}, y)} dz \cdot \frac{1}{|a|^n} = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}_\pm[f(x)](\frac{y}{a})$

$\mp i(z, \frac{y}{a})$

Лекция 10 (06.11.2021)

Упр. Докажите, что $(\pm iy)^\alpha = (\pm i)^{|\alpha|} y^\alpha$

6.) Если $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – б.у.ф., то $\mathcal{F}_\pm[f(x)]$ – тоже б.у.ф.

Док-во: Будем проверять опр. 3 б.у.ф.: ф. $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ наз-ся б.у.ф., если

1) $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2.) $\forall \alpha, \beta$ – мультииндекс. $\exists C_{\alpha,\beta} = const < +\infty$: $|x^\alpha \mathcal{D}^\beta g(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Проверим 2.):

$|y^\alpha \mathcal{D}^\beta (\mathcal{F}_\pm[f(x)](y))| \overset{2.)}{=} |y^\alpha \mathcal{F}_\pm[x^\beta f(x)](y)| \overset{3.)}{=} |\mathcal{F}_\pm(\underbrace{\mathcal{D}^\alpha[x^\beta f(x)]}_{\text{б.у.ф. обозначим её } g(x)})(y)| =$

$|(\pm i)^{|\alpha|}| = 1$

$= (2\pi)^{(-\frac{n}{2})} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)} dx \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \overset{\text{опр. 2 б.у.ф.}}{\leq} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{0,p}}{1+|x|^p} dx < +\infty$

если $p > n$

|| обозначим $C_{\alpha,\beta}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$

7.) Формула обращения: $\mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[f]] = f$ для любой б.у.ф. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

Док-во: Для $n=1$ мы уже знаем эту формулу из п. 2.5. Дальше – по индукции

Сделаем шаг индукции для $n=2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$

$\mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[f(x)](y)](z) = (2\pi)^{-1} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[(2\pi)^{-1} \iint\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{+i(x,y)} dx \right] e^{-i(y,z)} dy =$

Изменим порядок интегрирования (теорема Фубини): $|f(x) e^{+i(x,y)} e^{-i(y,z)}| = |f(x)| \leq$

$\leq \frac{K}{1+|x|^p}$ интеграл от неё сходится

$$\stackrel{(=)}{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,e^{+ix_2y_2}\,dx_2\right]e^{-iy_2z_2}\,dy_2\right\}e^{ix_1y_1}\,dx_1\right)e^{-iy_1z_1}\,dy_1 \stackrel{(=)}{}$$

$[\ldots] =$ одномерное преобр. Фурье оф. $f(x_1,x_2)$ по x_2, x_1 — параметр

$$\{\ldots\} = \widehat{[\ldots]} = \overset{\diamond}{f}(x_1;x_2) \underset{\uparrow}{=} f(x_1,z_2)$$

одномерная формула обращения

$$\stackrel{(=)}{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,z_2)\,e^{+ix_1y_1}\,dx_1\right)}_{\text{обр. одн. преобр. когда } z_2 \text{ — параметр}}e^{-iy_1z_1}\,dy_1 \underset{\uparrow}{=} f(z_1,z_2)$$

одномерн. ф. обр.

2.9 Равенство Парсеваля

<u>Теорема</u> (равенство Парсеваля): Пусть $n\geq 1$; $f,g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ — б.у.ф.

Тогда $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} F_{\pm}[f](y)\cdot\overline{F_{\pm}[g(x)](y)}\,dy$$

Док-во: **I шаг** Докажем, что $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)F_{\pm}[g(y)](x)\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} F_{\pm}[f(x)](y)\,g(y)\,dy \stackrel{(=)}{}$$

$$\stackrel{(=)}{} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,e^{\mp i(x,y)}\,dy\right]dx \underset{\uparrow}{\stackrel{(=)}{}}$$

меняем порядок интегр.

(т. Фубини) $\left|f(x)g(y)\,e^{\mp i(x,y)}\right| = |f(x)|\cdot|g(y)| \leq$
$$\leq \frac{const}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$\stackrel{(=)}{} \int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{\mp(x,y)}\,dx\right]}_{F_{\pm}[f(x)](y)}g(y)\,dy$$

II шаг

$$\overline{F_{\pm}[f(x)](y)} = F_{\mp}[\overline{f(x)}](y)$$

$$\overline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{\mp i(x,y)}\,dx} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}\,e^{\pm i(x,y)}\,dx$$

(III шаг) Объединяем I и II шаг

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{формула}\\ \text{обращения}}}{=} \int \mathcal{F}_{\mp}\left[\mathcal{F}_{\pm}\left[f(z)\right](y)\right](x)\,\overline{g(x)}\,dx \overset{\text{I шаг}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y)\,\mathcal{F}_{\mp}\left[\overline{g(x)}\right](y)\,dy \overset{\text{II шаг}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f(z)](y)\,\overline{\mathcal{F}_{\pm}[g(x)](y)}\,dy$$

$\boxed{\text{Замечание 1}}$ – Равенство Парсеваля аналогично равенству Ляпунова для рядов Фурье

Например, $n=1$ и $f=g$. Тогда

Равенство Парсеваля $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy$ $*$, $\hat{f}$ называют спектром непрер. сигнала f.

Равенство Ляпунова $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ $(**)$, где c_n – коэф. Фурье 2π-период. ф. f. Набор c_n называют спектром период. сигнала f.

Тогда $*$ и $**$ энергия сигнала f равняется энергии его спектра

$\boxed{\text{Замечание 2}}$ – Равенство Парсеваля было опубликовано в 1799

(2.10) Дальнейшие св-ва преоб. Фурье

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $n \geq 1$, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – б.у.ф. Функция $f*g$, задаваемая формулой $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ называется <u>свёрткой</u> ф-ий f и g

$\boxed{\text{Замечание 1}}$ Интеграл из опр. свёртки, сходится : $|f(x-y)g(y)| \overset{\text{опр. 2 б.у.ф.}}{\leq}$

$\leq const \cdot \frac{k_{op}}{1+|x|^p}$ – интеграл сходится, если $p > n$

$\boxed{\text{Замечание 2}}$ Свёртка полезна при решении дифф. ур., в т. вероятности, в т. обработки сигналов.