Вопросы, вынесенные на экзамен по «Основам функционального анализа». Летняя сессия. Июнь 2022 г.

Комментарий: Вопросы, вынесенные на экзамен по «Основам функционального анализа» соответствуют разделам, реально рассказанным на лекциях (с сохранением нумерации). Конспекты и видео-файлы лекций за февраль – май 2022 года выложены на сайте кафедры, а именно: http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Линейные пространства: Определение и примеры линейных пространств. Определение линейно независимых наборов векторов. Определение размерности пространства. Примеры конечномерных и бесконечномерных линейных пространств. Определение и примеры подпространств.

5.2. Нормированные линейные пространства: Дать определение нормы и нормированного пространства. Привести примеры норм в пространствах R^n, l_2 и $C[a,b]$. Дать определение сходящейся последовательности и предельной точки множества. Дать определение замыкания множества. Дать определение сферы радиуса r, а также открытого и замкнутого шара. Дать определение замкнутого и плотного множеств. Привести примеры замкнутых и незамкнутых, плотных и неплотных множеств. Дать определение сепарабельного пространства и привести примеры таких пространств. Доказать, что если последовательность векторов нормированного пространства имеет предел, то он единственный. Привести пример незамкнутого подпространства в бесконечномерном линейном пространстве. Дать определение фундаментальной последовательности. Доказать, что во всяком номрированном пространстве всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной и привести пример, что обратное утверждение не всегда верно. Дать определение полного нормированного пространства. Привести примеры таких пространств. Дать определение лебеговского функционального пространства $L_p(D)$. Сформулировать свойства лебеговских пространств (без доказательства): неравенство Гёльдера, неравенство Минковского , полнота и сепарабельность.

5.3. Линейные пространства со скалярным произведением: Дать определение пространства со скалярных произведением и привести примеры таких пространств. Сформулировать и доказать лемму о вычислении скалярных произведений $(x+y,x+y)$, $(x,\alpha y)$ и $(\alpha x,\alpha x)$. Сформулировать и доказать неравенство Коши–Буняковского. Доказать, что формула $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ задаёт норму в линейном пространстве со скалярным произведением. Доказать, что скалярное произведение непрерывно по первому аргументу. Сформулировать и доказать равенство параллелограмма. Дать определение гильбертова пространства и привести примеры таких пространств.

5.4. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта: Дать определение ортогональных векторов. Дать определение угла между ненулевыми векторами в вещественном гильбертовом пространстве. Сформулировать без доказательства теорему о процессе ортогонализации Грама–Шмидта.

5.5. Вектор наилучшего приближения и ортогональная проекция: Дать определение вектора наилучшего приближения. Сформулировать и доказать лемму о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Дать определение ортогональной проекции вектора на подпространство. Сформулировать и доказать лемму об эквивалентности понятий “ортогональная проекция” и “вектор наилучшего приближения”. Дать определение ортогонального дополнения к подпространству и прямой суммы подпространств. Привести соответствующие примеры. Сформулировать и доказать теорему о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения.

5.6. Проектирование на конечномерное подпространство и неравенство Бесселя: Сформулировать и доказать теорему об ортогональной проекции на конечномерное подпространство. Дать определение коэффициента Фурье и ряда Фурье вектора из гильбертова пространства. Сформулировать и доказать неравенство Бесселя.

5.7. Полные и замкнутые ортонормированные системы векторов. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной системы. Равенство Парсеваля: Дать определение полной системы, гильбетрова базиса и замкнутой системы. Сформулировать и доказать критерий полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Сформулировать равенство Парсеваля. Сформулировать теорему о существовании гильбертова базиса (без доказательства).

5.8. Теорема Рисса–Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств: Сформулировать и доказать теорему Рисса–Фишера о существовании и едиственности вектора с заданными коэффициентами Фурье. Дать определение изоморфности гильбертовых пространств. Сформулировать теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств и пояснить идею её доказательства.

5.9. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi,\pi]$.

§6. Ортогональные многочлены

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: Дать определение весовой функции и весового пространства Лебега. Сформулировать (без доказательства) лемму о том, что весовое пространство Лебега является гильбертовым пространством. Дать определение последовательности ортогональных многочленов.

6.2. Общие свойства ортогональных многочленов: Сформулировать и доказать семь свойств ортогональных многочленов, включая трёхчленную рекуррентную формулу.

6.3. Свойства нулей ортогональных многочленов: Сформулировать и доказать теорему о том, что нули ортогональных многочленов вещественны, просты и лежат в промежутке ортогональности. Вывести из неё следствие о знаках значения ортогонального многочлена на концах промежутка ортогональности. Сформулировать (без доказательства) теорему о том, что нули ортогональных многочленов чередуются.

6.4. Классические ортогональные многочлены: Дать определение семи классических ортогональных многочленов. Дать определение стандартизации ортогональных многочленов. Привести примеры стандартизаций. Дать определение производящей функции. Дать обзор основных свойств классических ортогональных многочленов (без доказательства), в частности, – написать уравнение Пирсона, написать формулу Родрига и сформулировать утверждение о наличии производящей функции, выражаемой через элементарные функции.

6.5. Многочлены Лежандра: Производящая функция и рекуррентные соотношения: Дать определение многочленов Лежандра $P_n(x)$, стандартизованных с помощью производящей функции. Вывести трёхчленную рекуррентную формулу для них. Доказать, что $P_n(x)$ действительно являются многочленами степени n с положительными старшими коэффициентами. Вывести вторую рекуррентную формулу для $P_n(x)$.

6.6. Многочлены Лежандра: Дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности: Вывести дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра. Доказать, что многочлены Лежандра с разными номерами ортогональны друг другу. Вычислить норму многочленов Лежандра $P_n(x)$, стандартизованных с помощью производящей функции и написать для них соотношения ортогональности.

6.7. Многочлены Лежандра: Формула Родрига и теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра: Написать (без доказательства) формулу Родрига. Пояснить идею её доказательства. Сформулировать (без доказательства) теорему о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра. Объяснить, почему она “почти очевидна”, если разложение понимать в смысле пространства $L_2[-1,1]$.

6.8. Мультипольное разложение кулонова потенциала: Вывести соответствующую формулу. Написать формулы для полного заряда, дипольного и квадрупольного моментов.

§7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы и их простейшие свойства: Дать определение линейного оператора. Привести примеры линейных операторов. Сформулировать и доказать, что линейная комбинация и суперпозиция линейных операторов снова являются линейными операторами.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы: Дать определение непрерывного оператора, ограниченного множества и ограниченного оператора. Сформулировать и доказать теорему о непрерывных и ограниченных операторах.

7.3. Норма оператора: Сформулировать и доказать лемму о трёх выражениях, задающих норму оператора. Дать определение нормы оператора. Сформулировать и доказать теорему о шести свойствах нормы оператора. Дать определение конечномерного оператора и его матрицы; оценить норму конечномерного оператора в терминах его матрицы.

7.4. Сходимость операторов и операторные ряды: Дать определение сходящейся последовательности опреаторов. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся последовательностей операторов. Сформулировать (без доказательства) теорему о полноте пространства операторов. Дать определение операторного ряда и его суммы. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся операторных рядов.

7.5. Обратимость оператров и обратный оператор: Дать определение обратимого оператора и образа оператора. Доказать, что образ оператора является подпространством. Дать определение обратного оператора. Сформулировать и доказать четыре свойства обратного оператора.

7.6. Теорема Неймана: Сформулировать и доказать теорему Неймана.

7.7. Спектр оператора: Дать определение резольвентного множества $\rho(A)$, спектра $\sigma(A)$, точечного спектра $\sigma_p(A)$, непрерывного спектра $\sigma_c(A)$ и остаточного спектра $\sigma_r(A)$ ограниченного оператора A . Сформулировать три свойства спектра оператора; доказать, что спектр оператора A содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$ с центром в нуле.

7.8. Линейные функционалы: Дать определение и привести пример линейного функционала. Дать определение ядра линейного функционала. Сформулировать пять свойств линейных функционалов, связанных с понятием ядра; доказать три из них. Сформулировать (без доказательства) теорему Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала. Дать определение сопряжённого пространства.

7.9. Бра- и кет-векторы: Дать определение бра- и кет-векторов. Привести примеры разложения тождественного оператора и нахождения резольвентного оператора с использованием бра- и кет- обозначений.

7.10. Оператор, сопряжённый к ограниченному: Дать определение оператора, сопряжённого к данному. Сформулировать и доказать мини-лемму. Сформулировать шесть свойств сопряжённого оператора; доказать перове из них. Сформулировать (без доказательства) теорему о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра.

7.11. Самосопряжённые и компактные операторы: Дать определение ограниченного самосопряжённого оператора. Сформулировать и доказать теорему о точечном спектре самосопряжённого оператора. Дать определение компактного оператора. Сформулировать (без доказательства) теорему о существовании базиса, состоящего из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора.

§8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и задачи, к ним приводящие. Интегральный оператор Гильберта–Шмидта: Дать определение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра I и II рода. Доказать, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма. Дать определение оператора Гильберта-Шмидта. Сформулировать (без доказательства) теорему о линейности, норме и компактности оператора Гильберта–Шмидта. Сформулировать (без доказательства) теорему об операторе, сопряжённом к оператору Гильберта–Шмидта. Дать определение симметричного ядра.

8.2. Уравнения с вырожденным ядром: Дать определение вырожденного ядра. Изложить способ решения интегрального уравнения Фредгольна II рода путём сведения его к системе линейных алгебраических уравнений.

8.3. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений: Вывести ряд Неймана и изложить метод последовательных приближений.

8.4. Интегральные уравнения с симмеричным ядром. Теорема Гильберта–Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром. Разложение решений по собственным функциям ядра: Дать определение симметричного ядра. Дать определение характеристического числа и собственной функции ядра. Сформулировать (без доказательства) теорему Гильберта–Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром. Вывести разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

Составил В.А. Александров
5 июня 2022 г.