IV Семестр

Лекция 1 (5 февраля 2022)

§5. Линейное пр-во со скалярным произведением

(5.1) Линейное пр-во

$\boxed{\text{Опр.}}$ Мн-во L называется линейным (или векторным) пр-вом над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), а его элементы называются векторами, если в L введены две операции: $L\times L\longrightarrow L$ (сложение векторов $x,y\in L$ и её результат записывают $x+y\in L$) и $\mathbb{R}\times L\longrightarrow L$ (или $\mathbb{C}\times L\longrightarrow L$) называется умножением вектора $x\in L$ на число α и её результат обозн. $\alpha x\in L$), которые удовл. след. условиям, называемым аксиома[ми] лин. пр-ва:

$x,y,z\in L$, α,β – любые числа

I
1.) $x+y=y+x$
2.) $(x+y)+z=x+(y+z)$
3.) $\exists 0\in L: x+0=x$ – сущ. нуля
4.) $\exists (-x)\in L: x+(-x)=0$ – сущ. обратного элемента

$\Big\}$ L образует коммутативную группу по сложени[ю]

II
5.) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
6.) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
7.) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

$\Big\}$ дистрибутивность

8.) $1\cdot x=x$

Упр: Докажите, что векторы 0 и $(-x)$ определены единственным образо[м]

Примеры лин. пр-в: 1.) – Мн-во векторов (т.е. напр. отрезков в $\mathbb{R}^3$) с сложением по правилу параллелограмма и растягиванием при умн[ожении] на число. 2.) – $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n=\{\overset{x}{\overbrace{(x_1,\dots,x_n)}}\mid x_k\in\mathbb{C}\ \forall k=1,\dots,n\}$

$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$$

3.) – $\ell_2=\{x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\mid x_k\in\mathbb{R}\text{ (или }\mathbb{C})\ \forall k=1,\dots \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<+\infty\}$

Операции умножения вектора на число и сложения векторов задаются покомпонентно.

Почему $x \in l_2 \Rightarrow \alpha x \in l_2$ и $x, y \in l_2 \Rightarrow x+y \in l_2$?

① $\alpha x \in l_2 \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \underset{\text{т.к. } x \in l_2}{<} +\infty$

② $|x_k + y_k|^2 \leq (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + \underbrace{2|x_k| \cdot |y_k|}_{\leq |x_k|^2 + |y_k|^2} + |y_k|^2 \leq 2(|x_k|^2 + |y_k|^2)$

$x+y \in l_2 \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \leq 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \underset{\text{т.к. } x, y \in l_2}{<} +\infty$

4.) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$); f-непр.$\}$

$\left.\begin{array}{l} (f+g)(t) = f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t) \end{array}\right\}$ сложение и умножение опр. поточечно

5.) $S(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех б.у.ф. в $\mathbb{R}^n$ с поточечными операциями сложения и умножения

Примеры мн-в, которые не явл. лин.пр-вами:

1.) $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \forall k=1,\ldots,n+1 \; x_k \in \mathbb{R}$ и $\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$ —

— n-мерная сфера единичного радиуса с центром в нуле; с операциями покомпонентного сложения и умножения. S^n не явл. лин. пр-ом, т.к. если $x \in S^n$, и $|\alpha| \neq 1$, то $\alpha x \notin S^n$.

2.) Пр-во Лобачевского

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L — лин. пр-во. Конечный набор векторов $x, y, \ldots, z \in L$ называется лин. независимым, если из того, что рав-во $\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z = 0$ выполняется для некоторого набора чисел $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ следует, что $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$. В противном случае набор векторов $x, y, \ldots, z$ — лин. зависим

$\boxed{\text{Опр.}}$ Бесконечный набор векторов из L называется лин. независимым, если любое конечное под-во векторов из этого бесконечного набора явл. лин. независимым. В противном случае бесконечный набор — лин. завис.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – лин пр-во. Говорят, что L имеет конечную размерность, равную n, если в L сущ. n лин. независимых векторов и всякие $(n+1)$ вектор из L явл. лин. зависимыми. Обозн. $\dim L = n$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Говорят, что L имеет размерность бесконечность (или, что L бесконечномерно), если $\forall n \geq 1$ в L сущ. n лин. независимых векторов. Обозн. $\dim L = \infty$

Примеры: 1.) $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$

2.) $\dim \ell_2 = \infty$

Фикс. $n \geq 1$ $\forall k = 1, \dots, n$ зададим вектор $x_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-ое место}}}{1}, 0, \dots) \in \ell_2$

Убедимся, что векторы $x_1, \dots, x_n$ лин. незавeсимы. Допустим, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – числа такие, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}_{\parallel} = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots 0, \dots) = (0, 0, \dots 0, \dots)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1, \dots, x_n \text{ – лин. независим} \Leftarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Downarrow$$

Т.к. n – произвольно, то $\dim \ell_2 = \infty$

Упр: Д-ать, что $\dim C[a,b] = \infty$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – лин. пр-во. Тогда мн-во $M \subset L$ называется <u>подпр-ом</u> в L, если M само явл. лин. пр-вом относительно тех же операций сложения и умножения, которые определены в L. (т.е. если $\forall x, y \in M$ и $\forall \alpha$ – число имеем $x + y \in M$ и $\alpha x \in M$)

Примеры: 1.) $\{0\}$ и L явл. под-вом пр-ва L – тривиальные подпр-а

2.) Мн-во всех многочленов явл подпр-ом в $C[a,b]$

5.2 Нормированные пр-ва

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – лин. пр-во.

1 – лин. пр-ва
2 – нормированные пр-ва
3 – лин. пр-ва со скалярным произведением
• – Гильбертовы пр-ва

Функцию $\|\cdot\| : L \to [0, +\infty)$ называют нормой в пр-во L, если она удовлетворяет аксиомам нормы:

1.) $\forall x \in L$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in L$ – неотр. и невырожденность нормы

2.) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall x \in L$ $\forall \alpha$ – число (положительная однородность нормы)

3.) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in L$ – нер-во треугольника

$\boxed{\text{Опр.}}$ Лин. пр-во L, в котором введена норма, наз-ся <u>нормированным пр-ом</u>

Примеры норм. пр-в: 1) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Каждое из след. функций задаёт норму в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \text{ – Чебышёвская норма}$$

Упр: док-ать, что Чебышёвская норма – норма.

2) В l_2 функция $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$ задаёт норму.

3.) В $C[a,b]$ ф-ия $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$ задаёт норму

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – норм. пр-во $x_0 \in L$; $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – последов. т. (векторов) в L. Говорят, что последов. $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ сх-ся к x_0 при $n \to \infty$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозн. $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – норм. пр-во и $M \subset L$. Говорят, что $x_0 \in L$ явл. <u>предельной т.</u> мн-ва M, если $\exists x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек мн-ва M таких, что $\forall n$ $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Замыканием мн-ва $M \subset L$ называют объединение M и мн-ва его предельных т. Обозн. $\mathrm{cl}\, M$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\forall x_0 \in L$ и $\forall r \geq 0$ положим $B(x_0, r) = \{x \in L \mid \|x - x_0\| < r\}$ – открытый шар радиуса r с центром в т. x_0., $\overline{B}_0(x_0, r) = \{x \in L \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнутый шар —//—

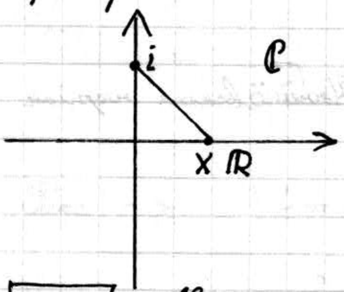
Задача: Док-ать, что $\forall x_0 \in L$ и $\forall r > 0$ верно $\mathrm{cl}\, B(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r)$. Верно ли это при $r = 0$?

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L – норм. пр-во $M \subset L$. Говорят, что M явл. а) <u>замкнутым множеством</u>, если $\mathrm{cl}\, M = M$; в.) <u>плотным</u>, если $\mathrm{cl}\, M = L$

Примеры: Пример 1

1.) - Мн-во $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$, т.к. $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists x_1,\dots,x_n,\dots$ - последов. рац. чисел, таких, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. В самом деле $\forall n$ в интервале $(x, x+\frac{1}{n})$ сущ. рац. число, обозначим его x_n. Тогда $x_n\in\mathbb{Q}$ и $\|x_n-x\| = |x_n-x| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пример 2: Мн-во вещ. чисел $\mathbb{R}$ не плотно в мн-во $\mathbb{C}$



В самом деле, $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \|x-i\| = |x-i| \geq 1$. Значит не сущ. $x_1,\dots,x_n,\dots\in\mathbb{R} : \|x_n-i\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Норм. пр-во L называется <u>сепарабельным</u>, если в L существ. счётное, плотное подмн-во.

<u>Замечание</u>: „Сепарабельное" интуитивно значит „не очень большое".

Примеры сепараб. пр-в:
1.) $\mathbb{R}$ (т.к. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$)
2.) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ (т.к. в них плотным счётным мн-вом будет совокупность векторов, у каждого из которых все координаты рациональные)
3.) l_2
4.) $C[a,b]$

<u>Утверждение</u>: Сходящаяся посл-ть может иметь только один предел

Док-во: Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{x}$

$$0\leq \|x-\tilde{x}\| = \|(x-x_n)-(\tilde{x}-x_n)\| \leq \|x-x_n\| + \|\tilde{x}-x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow x=\tilde{x}, \text{ т.к. } \|x-\tilde{x}\|=0$$

Задача: Док-ать, что в любом норм. пр-ве любое конечномерное подпр-во замкнуто

Пример: Пример незамкнутого под-ва в бесконечномерном пр-ве $L = C[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, M - мн-во всех многочленов. Убедимся, что M - под-во (очевидно в силу п.5.1) и незамкнуто. Рассмотрим $g(t) = \sin t$. По ф-ле Тейлора:

$$g(t) = \underbrace{g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}}_{\overset{\text{опр}}{=} P_n(t)} + \frac{g^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi)\, t^{n+1}, \text{ где } \xi\in(0,t)$$

Тогда $\|g(t)-P_n(t)\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |g(t)-P_n(t)| \leqslant \max\limits_{\substack{\xi\in[0,t)\\ t\in[a,b]}} \left| \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t^{n+1} \right| \leqslant$

$\leqslant \max\limits_{t\in[a,b]} \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{[\overset{A}{\overset{\|def}{\max(|a|,|b|)}}]^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ при любом A

Значит $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ лежат в M и сх-ся к $g(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(t)$ — предельная т. мн-ва M, но $g \notin M \Rightarrow clM \neq M$, т.е.

M незамкнуто. □

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L — норм. пр-во. Говорят, что последов векторов $x_1, \dots, x_n, \dots$ из L явл. фундаментальной, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N$ имеем $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

Утв. 2: Если посл. векторов $x_1, \dots, x_n, \dots$ в нормир. пр-ве L сх-ся, то она фундаментальна.

Док-во: Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n \geqslant N\ \|x_n-x_0\|<\varepsilon$

Значит $\forall n,m \geqslant N\ \ \|x_n-x_m\| = \|(x_n-x_0)-(x_m-x_0)\| \leqslant \|x_n-x_0\|+\|x_m-x_0\| < 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ — фундамент. □

Замечание. Утв., обратное к 2-ому утв., верно не всегда. В самом деле, пусть M — мн-во всех многочленов на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|P\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |P(t)|$. Убедимся, что в нём не всякая фунд. посл. сх-ся.

Рассмотрим $P_n(t)$ — тейлоровский многочлен степени n для $g(t)=\sin t$.

Мы знаем, что в $C[a,b]$ $P_n \to g$, значит $P_1, P_2, \dots, P_n$ фундамент. посл. в $C[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n,m>N\ \ \|P_n(t)-P_m(t)\|_{\cancel{C[a,b]}\ M} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1, \dots, P_n \dots$ явл. фунд. в M

Допустим, что $P_1, \dots, P_n$ имеет предел P в $M \Rightarrow \|P_n-P\|_{C[a,b]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Значит в $C[a,b]$ имеем $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ и $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$

По утв. 1 $P=g$ — противоречие

$\boxed{\text{Опр.}}$ Нормир. пр-во L называется полным, если в нём всякая фундамент. посл. сх-ся.

Примеры полных пр-в: 1) — $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \ell_2$ 2) — $\ell_p, \overset{\infty}{\underset{\vee}{p}} \geqslant 1$

$\ell_p = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$

$\|x\|_{\ell_p} = \|x\|_p \overset{def}{=} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ и $x+y$ и αx опр. покоординатно.

ℓ_p — бесконечномерное нормир. сепарабельное пр-во.

3.) Пусть $1 \le p < +\infty$, $n \ge 1$ $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ — обл. в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$L_p(\mathcal{D}) = \{ f: \mathcal{D} \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \} \mid \int_{\mathcal{D}} |f(t)|^p dt < +\infty \} \text{ — пр-во Лебега.}$$

$f+g$ и αf опр. поточечно

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{D})} = \|f\|_p = \left\{ \int_{\mathcal{D}} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$ Тогда $L_p(\mathcal{D})$ — бесконечномерное нормир. сепарабельное пр-во.

Св-ва пр-ва Лебега:

1.) (Нер-во Гёльдера): Пусть $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in L_p(\mathcal{D})$, $g \in L_q(\mathcal{D})$.
Тогда $f \cdot g \in L_1(\mathcal{D})$ (произв.), причём $\|f \cdot g\|_{L_1(\mathcal{D})} \le \|f\|_{L_p(\mathcal{D})} \cdot \|g\|_{L_q(\mathcal{D})}$

<u>Замечание</u>: Нер-во Гёльдера явл. точным в том смысле, что если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $f \notin L_p(\mathcal{D})$, то $\exists g \in L_q(\mathcal{D})$ такая, что $f \cdot g \notin L_1(\mathcal{D})$

2.) (Нер-во Минковского) Пусть $p \ge 1$ и $f, g \in L_p(\mathcal{D})$. Тогда $f+g \in L_p(\mathcal{D})$, причём $\|f+g\|_{L_p(\mathcal{D})} \le \|f\|_{L_p(\mathcal{D})} + \|g\|_{L_p(\mathcal{D})}$ (т.е. в L_p выполняется нер-во треугольника)

3.) $\forall p \ge 1$ $L_p(\mathcal{D})$ явл. линейным, нормированным, бесконечномерным, сепарабельным, полным пр-ом.

<u>Замечание</u>: Если в опр. пр-ва $L_p(\mathcal{D})$ стоял не интеграл Лебега, а интеграл Римана, то полноты бы не было.

<u>Замечание</u>: Какие ф. в $L_p(\mathcal{D})$ считаются равными 0? По аксиоме нормы $\|f\|_{L(\mathcal{D})} = 0 \Leftrightarrow f=0$ в смысле $L_p(\mathcal{D})$

$$\Updownarrow$$

$\int_{\mathcal{D}} |f(t)|^p dt = 0$ из матанализа $\Longleftrightarrow \exists E \subset \mathcal{D}$ и $\underset{\text{мера Лебега}}{\text{mes}}\, E = 0$, причём $\forall t \in \mathcal{D}$ и $t \notin E$ $|f(t)|^p = 0$

(т.е. $|f(t)| = 0$)

Функции f с таким свойством называются <u>равными нулю всюду</u> в $\mathcal{D}$, кроме мн-ва E меры 0.

5.3 Линейные пр-ва со скалярным произведением.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть L — лин. пр-во. Говорят, что в L задано скалярное произв., если задана ф. $(\cdot,\cdot): L\times L \longrightarrow \mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), причём $\forall x,y,z\in L$ и $\forall \alpha,\beta$ — должны удовлетворяться аксиомы ск. произв:

A1 — $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$ — линейность по первому арг.

A2 — $(x,y)=\overline{(y,x)}$ ← сопряж. — эрмитова симметричность

A3 — $(x,x)\geqslant 0$, причём $(x,x)=0 \Longleftrightarrow x$ — нулевой вектор.

Примеры лин. пр-в. со ск. произв.: ① $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, сумма векторов и произведение вектора на число опр. покоординатно, $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$

Упр.: убедиться, что $\mathbb{C}^n$ — пр-во со ск. произв.

② $\ell_2=\{(x_1,\dots,x_n,\dots) \mid \forall n\ x_n\in\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\}$

$(x,y)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$. Почему этот ряд сх-ся? Потому что он сх-ся абсолютно

$$\forall n\quad |x_n\overline{y_n}|=|x_n|\cdot|y_n| \underset{\substack{\uparrow\\ 0\leqslant(|x_n|-|y_n|)^2}}{\leqslant} \frac{|x_n|^2+|y_n|^2}{2}.$$

Значит $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|x_n\overline{y_n}|\leqslant \frac12\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 + \frac12\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<+\infty$

Проверяем A1:

$$(\alpha x+\beta y, z)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)\overline{z_n}=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{z_n}+\beta\sum_{n=1}^{\infty}y_n\overline{z_n}= \alpha(x,z)+\beta(y,z)\ \Box$$

Проверяем A2:

$$\overline{(y,x)}=\overline{\sum_{n=1}^{\infty}y_n\overline{x_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{y_n}x_n=(x,y)$$

Проверяем A3:

$$(x,x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{x_n}=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\geqslant 0$$

Если $(x,x)=0$, т.е. если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=0$, то $\forall n\ |x_n|^2=0$, т.е. $x_n=0$, т.е. $x=0$, и наоборот: если $x=0$, то $(x,x)=0$

③ $L_2(\mathcal{D})=\{f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\mid \int\limits_{\mathcal{D}}|f(t)|^2dt<+\infty\}$

$(f,g)_{L_2(\mathcal{D})}=\int\limits_{\mathcal{D}} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ Упр: проверить это опр. ск. произв.

$\boxed{\text{Лемма 1}}$: Пусть L — лин. пр-во со скалярн. произв. Тогда $\forall x,y\in L$ и $\forall\alpha$ — число верно:

1) $(x+y, x+y)=(x,x)+2\operatorname{Re}(x,y)+(y,y)$

2 – $(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$

3 – $(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|^2(x,y)$

Док-во: 1.) – $(x+y,x+y)\overset{A1}{=}(x,x+y)+(y,x+y)\overset{A2}{=}\overline{(x+y,y)}+\overline{(x+y,x)}=$

$=\overline{(x,x)+(y,x)}+\overline{(x,y)+(y,y)}=(x,x)+\underbrace{(x,y)+(x,y)}_{2Re(x,y)}+(y,y)$ □

2.) $(x,\alpha y)\overset{A2}{=}\overline{(\alpha y,x)}\overset{A1}{=}\bar{\alpha}\overline{(y,x)}\overset{A2}{=}\bar{\alpha}(x,y)$ □

3.) $(\alpha x,\alpha x)=\alpha(x,\alpha x)=\alpha\bar{\alpha}(x,x)=|\alpha|^2(x,x)$ □

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ (нер-во Коши-Буняковского-Шварца) Пусть L – лин. пр-во со скалярным произв. Тогда $\forall x,y\in L$ выполняется нер-во $|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y)$

Док-во: Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда $0\overset{A3}{\leqslant}(x+\alpha y,x+\alpha y)\overset{①}{=}(x,x)+2\alpha Re(x,y)+\alpha^2(y,y)$.

Получили кв. трёхчлен с вещ. коэфф., и этот трёхчлен $\geqslant0$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Дискриминант $\leqslant0$: $D=4(Re(x,y))^2-4(x,x)(y,y)\leqslant0$

$(Re(x,y))^2\leqslant(x,x)(y,y)$

Случай I: x и y таковы, что $(x,y)\in\mathbb{R}\Rightarrow(x,y)^2\leqslant(x,x)(y,y)$

Случай II: x и y таковы, что $(x,y)\in\mathbb{C}$. Тогда $(x,y)=\rho e^{i\varphi}$, где $\rho=|(x,y)|\geqslant0$. Рассмотрим $\tilde{x}=e^{-i\varphi}x$. Тогда $(\tilde{x},y)\overset{A1}{=}\rho\in\mathbb{R}$.

Значит пара векторов $y,\tilde{x}$ удовл. случаю I $\Rightarrow|(\tilde{x},y)|^2\leqslant(\tilde{x},\tilde{x})(y,y)$

$|(\tilde{x},y)|^2=|(x,y)|^2$

$(\tilde{x},\tilde{x})=(e^{-i\varphi}x,e^{-i\varphi}x)\overset{Л1(3)}{=}|e^{-i\varphi}|^2(x,x)=(x,x)$ □

$\boxed{\text{Лемма 3}}$. В любом пр-ве L со ск. произв. формула $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ задаёт норму.

Док-во: Проверим аксиомы нормы:

1.) – Неотр. и невырожд. нормы: $\forall x\in L$ $\|x\|=\sqrt{(x,x)}\overset{A3}{\geqslant}0$

Кроме того $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=0\Leftrightarrow(x,x)=0\overset{A3}{\Leftrightarrow}x=0\in L$

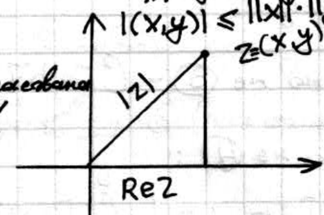
2.) – Полож. одн. нормы: $\forall x\in L$ $\forall\alpha$ – число $\|\alpha x\|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}\overset{Л1(3)}{=}\sqrt{|\alpha|^2(x,x)}=$

$=|\alpha|\cdot\|x\|$

3) — Нер-во треугольника: $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)\overset{A1(1)}{=}\|x\|+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\| \leqslant$

$\mathrm{Re}(x,y) \leqslant |(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$

$\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$



Замечание: Говорят, что норма $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ порождена (или согласована) ск. произв. в L

Замечание: Нер-во К-Б-Ш все помнят в виде $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$

Замечание: Всякое лин. пр-во со ск. произв. автоматически является норм-анным $\Rightarrow$ в пр-ве со ск. произв. введены все понятия, которые были известны для норм. пр-в, а именно: предел. посл., предельная т. мн-ва, замыкание мн-ва, фундамент. посл., полное пр-во

Лемма 4 (непр. ск. произв. по первому аргументу): Скалярное произв. непр. по первому аргументу, т.е. если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, то $\forall y\in L$ $(x_n,y)\xrightarrow[n\to\infty]{}(x,y)$

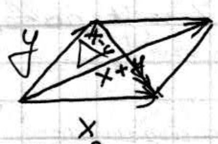
Док-во: Нужно доказать, что $(x_n,y)-(x,y)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$|(x_n,y)-(x,y)|=|(x_n-x,y)|\overset{К-Б}{\leqslant}\underbrace{\|x_n-x\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\cdot\underbrace{\|y\|}_{const}\to 0 \quad \square$$

Упр: докажите, что ск. произв. непрерывно по второму аргументу и по совокупности обоих аргументов

Лемма 5 (равенство параллелограмма). Пусть L — лин. пр-во со ск. произв. и $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ — норма порождена ск. произв. Тогда $\forall x,y\in L$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$



Док-во:

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)\overset{A1(1)}{=}\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2=(x-y,x-y)=\|x\|^2-2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|+2\|y\|$$

Замечание: Можно док-ать и обратное: если L — лин. норм. пр-во такое, что $\forall x,y\in L$ выполнено равенство пар-мма, то в L можно ввести ск. произв, согласованное с исходной нормой пр-ва L.

Опр: Пр-во со ск. произв. называется гильбертовым и обозн. H, если оно является полным отн. нормы, порождённой ск. произведением

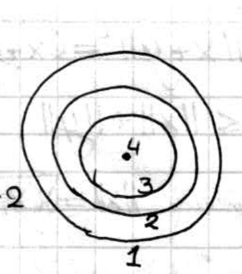
Примеры гильбертовых пр-в: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l_2, L_2(D)$

1 — лин. пр-ва

2 — норм. лин пр-ва

3 — лин. пр-во со ск. произв.

4 — Гильбертовы пр-ва



① , но не ② — пр-во основных (пробных функций)

② , но не ③ — $C[a,b]$ и $L_p(\mathfrak{L})$ при $p \neq 2$

③ , но не ④ :

$$\{ f : [a,b] \mid \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty$$

со ск. произв $(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$, где $\int_a^b$ — интеграл Римана

Далее в §5 H обозн. гильбертовы пр-ва

(5.4) Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Опр. Говорят, что $x, y \in H$ ортогон. друг другу, если $(x,y) = 0$, обозн. $x \perp y$

Упр.: Док-ать, что $\forall x \in H \;\; x \perp 0 \in H$

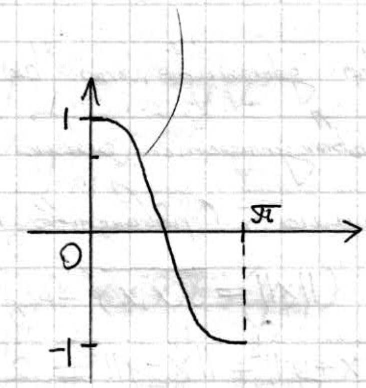
Опр. Пусть H — гильбертово пр-во над $\mathbb{R}$ (не над $\mathbb{C}$). И пусть $x \in H$, $x \neq 0$, $y \in H$, $y \neq 0$. Тогда углом между x и y называется число $\varphi \in [0, \pi]$: $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Замечание: угол корректно определён: $\left| \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \overset{К\text{-}Б}{\leqslant} 1$

Упр: Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Док-ать, что след утв. эквивалентны:

1.) $x \perp y$

2.) угол между x и y равен $\frac{\pi}{2}$



Теорема (Процесс ортогонализации Грама-Шмидта) Пусть H — гильбертово пр-во и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — посл. лин. независимых векторов в H. Тогда две след. посл-ти

$y_1 = x_1$ $\qquad z_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$

$y_2 = x_2 - (x_2, z_1) z_1$ $\qquad z_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$

- - - - - - - - - - - - -

$y_n = x_n - \sum\limits_{j=1}^{n} (x_n, z_j) z_j$ $\qquad z_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$

обладают св-вами: 1.) $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ — ортонорм. посл., т.е. $(z_k, z_j) = \delta_{kj}$

2.) $\forall n \;\; L[x_1, \ldots, x_n] \overset{def}{=} \{ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \mid \alpha_k \text{ — любые числа} \} = L[z_1, \ldots, z_n]$ — лин. оболочка

(5.5) – вектор наилучшего приближения

Опр. – Пусть S – лин. пр-во в H. Вектор $x\in S$ наз. вектором наилучшего приближения к вектору $y\in H$ с помощью векторов из S (или ближайший вектор) если $\forall z\in S$ имеем $\|y-x\|\leq\|y-z\|$

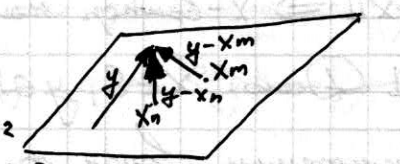
Лемма Пусть S – замкнутое подпр. в H. Тогда $\forall y\in H$ $\exists!\in S$ – вектор. наилучшего приближения.

Док-во: Пусть $d=\inf\limits_{x\in S}\|y-x\|$. Выберем посл. $x_1,\dots,x_n,\dots\in S$ так, что

$\|y-x_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{} d$ (*). Применим равенство параллелограмма

$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$ к $u=y-x_n$, $v=y-x_m$

$$\|(y-x_n)+(y-x_m)\|^2+\|(\cancel{y}-x_n)-(\cancel{y}-x_m)\|=$$
$$=2\|y-x_n\|^2+2\|y-x_m\|^2$$



$$\|x_m-x_n\|^2=2\|y-x_m\|^2+2\|y-x_n\|^2-\underbrace{4\|y-\underset{\in S}{\frac{x_m+x_n}{2}}\|^2}_{\geq\ \inf\limits_{z\in S}\|y-z\|=d}\quad(**)$$

(*) $\forall\varepsilon>0$ $\exists n(\varepsilon)$: $\forall n\geq n(\varepsilon)$

$$d^2-\varepsilon\leq\|y-x_n\|^2\leq d^2+\varepsilon$$

$(**)\Rightarrow$ $\forall m,n>n(\varepsilon)$ $\|x_m-x_n\|\leq 2(d^2+\varepsilon)+2(d^2+\varepsilon)-4d^2=4\varepsilon$

Т.о. $x_1,\dots,x_n,\dots$ – фундаментальная. Т.к. H – гильбертово (т.е. полное), то $\exists x\in H$; т.к. S – замкнуто, то $x\in S$

$x_1,\dots,x_n,\dots$ сх-ся к x, т.е. $x_n\xrightarrow[k\to\infty]{}x$. Убедимся, что x – это вектор. наил. приближения. Для этого перейдём к пределу в *: $\|y-x_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}d$, $\|y-x_n\|\to\|y-x\|$.

Но предел если сущ., то единств. $\Rightarrow\|y-x\|=d\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x – вектор наилучшего приближ. Существование вектора наилучшего приближ. доказано. $\square$

Докажем единственность (от противного): док., что $\exists x\in S$ и $\tilde{x}\in S$,

$\|y-x\|=d=\|y-\tilde{x}\|$. Применим правило паралл-мма к векторам

$u=y-x$, $v=y-\tilde{x}$: $\|x-\tilde{x}\|^2=2\|y-x\|^2+2\|y-\tilde{x}\|-\|(y-x)+(y-\tilde{x})\|^2\leq$

$\leq 4d^2-4d^2=0\Rightarrow\|x-\tilde{x}\|^2=0\Rightarrow x=\tilde{x}$ $\square$

$$\|(y-x)+(y-\tilde{x})\|^2=4\|y-\underset{\in S}{\frac{x+\tilde{x}}{2}}\|^2\geq 4d^2$$

Опр Пусть S – под-во в H. Говорят, что $x\in S$ явл. ортог. проекцией вектора $y\in H$ на под-во S, если $y-x\perp z$ $\forall z\in S$

$\boxed{\text{Лемма}}$. Пусть S – под-во (м.б. незамкнуто) в H $y \in H$. Тогда след. утв. эквивалентны:

1 – $x \in S$ явл. ортог. пр. на S вектора $y \in H$

2 – $x \in S$ явл. вектором наилучшего приближения к вектору $y \in H$ с помощью векторов из S.

Док-во опирается на формулу 1 из п. 5.3:

$(u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2$

$1 \Rightarrow 2$ Дано: $x \in S, y \in H$ и $(y-x, z) = 0$ $\forall z \in S$

Тогда $\|y-z\|^2 = \|(y-x)-(z-x)\| \overset{\Pi(1)}{=} \|y-x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\underbrace{y-x, \underbrace{z-x}_{\in S}}_{0}) + \underbrace{\|z-x\|^2}_{\geq 0} \geq$

$\geq \|y-x\|^2 \Rightarrow$ x – вектор наилучшего приближения.

$2 \Rightarrow 1$ Дано: $x \in S$, $y \in H$ и $\|y-z\| \geq \|y-x\|$ $\forall z \in S$. Фиксируем $z \in S$ и рассмотрим вспом. ф. $f(t) = \|y-x+tz\|^2$, f определена $\forall t \in \mathbb{R}$.

Тогда $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = \|y - \underbrace{x+tz}_{\in S}\|^2 \geq \|y-x\|^2 = f(0) \Rightarrow t=0$ – т. минимума ф. f. Тогда $f'(0) = 0$. Вычислим эту производную: $f(t) = (y-x+tz, y-x+tz) =$

$= (y-x, y-x) + 2\,\mathrm{Re}(y-x, tz) + t^2(z,z) = \|y-x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(y-x, z) + t^2(z,z)$

$f'(t) = 2\,\mathrm{Re}(y-x, z) + 2t\|z\|^2 \Rightarrow f'(0) = 2\,\mathrm{Re}(y-x, z) = 0$ $\forall z \in S$

Случай 1: H над $\mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(y-x, z) = (y-x, z) = 0$

Случай 2: H над $\mathbb{C}$: Тогда iz определён, и $iz \in S \Rightarrow \mathrm{Re}(y-x, iz) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(-i(y-x, z)) = 0 = +\mathrm{Im}(y-x, z) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Im}(y-x,z)=0\\ \mathrm{Re}(y-x,z)=0\end{array}\right\} \Rightarrow (y-x, z) = 0 \quad \forall z \in S \quad \square$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть S – подпр-во в H. Ортогональным дополнением к S называется $\{x \in H \mid \forall y \in S \ x \perp y\}$. Обозн. $S^{\perp}$.

$\boxed{\text{Опр.}}$ S и T – под-ва в H. Говорят, что H явл. прямой суммой под-в S и T, если $\forall x \in H$ $\exists!\, y \in S$ и $\exists!\, z \in T$: $x = y + z$

Пример: 1) $H = \mathbb{R}^3$; S – плоскость в $\mathbb{R}^3$, $S^{\perp}$ – прямая ортог. S

Тогда $H = S \oplus S^{\perp}$

2) $H = L_2[-1,1]$, S – под-во чётных ф., T – под-во нечётных ф. Тогда $H = S \oplus T$

Док-во: $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\in T}$ Упр.: такое разложение единственно

Обозначение: прямую сумму под-в S и T обозн. $S \oplus T$

Контрпример: $H = \mathbb{R}^3$, S и T — непараллельные плоскости в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что $\forall x \in H$ $\exists y \in S$ и $\exists z \in T$: $x = y + z$. Но y и z находятся неоднозначно.

Если $w \in S \cap T$, то $x = (\underset{\underset{S}{\Uparrow}}{y+w}) + (\underset{\underset{T}{\Uparrow}}{z-w})$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть S — замкнутое под-во гильбертова пр-ва H. Тогда $H = S \oplus S^\perp$

Док-во: Нужно док-ать, что $\forall x \in H$ $\exists! y \in S$ и $\exists! z \in S^\perp$: $x = y + z$.

Существование: Обозн. y — вектор наилучшего приближения для $x \in H$ с помощью векторов из S. Он сущ., т.к. S — замкнуто и H — гильбертово. $x = \underset{\underset{S}{\Uparrow}}{y} + \underset{\underset{S^\perp}{\Uparrow}}{(x-y)}$

Докажем единственность от противного: допустим, $\exists x \in H$ $\exists y, \tilde{y} \in S$ и $\exists z, \tilde{z} \in S^\perp$: $x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z} \overset{*}{\Rightarrow} \underset{\underset{S}{\Uparrow}}{y - \tilde{y}} = \underset{S^\perp}{\tilde{z} - z} \,\Big|\cdot(\tilde{z} - z)$

$$(\underset{\in S}{y-\tilde{y}}, \underset{S^\perp}{\tilde{z}-z}) = (\tilde{z}-z, \tilde{z}-z) = 0 = \|\tilde{z}-z\|^2 \Rightarrow \tilde{z} - z = 0 \Rightarrow \tilde{z} = z$$

Тогда из $*$ $y = \tilde{y}$ $\square$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть S — замкнутое под-во гильбертова пр-ва H и $x_1, \dots, x_n$ — ортонорм. базис в S. Тогда $\forall y \in H$ вектор $x \in S$, задаваемый формулой $x = \sum_{k=1}^{w} \lambda_k x_k$, где $(y, x_k) = \lambda_k$, явл. ортог. проекцией y на S. При этом $\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$ — т. Пифагора.

Док-во: I шаг Убедимся, что $y - x \perp x_k$ $\forall k = 1, \dots, n$

$$(y-x, x_k) = (y, x_k) - \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p, x_k\right) = \lambda_k - \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \underbrace{(x_p, x_k)}_{\delta_{pk}} = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

II шаг. Убедимся, что $\forall z \in S$ $y - x \perp z$

$$(y-x, z) = \left(y-x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y-x\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k (x_k, y-x)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} (y-x, x_k) = 0$$

III шаг $\|y\|^2 = \|(y-x) + x\|^2 = \|y-x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\cancelto{0}{(y-x, x)} + \|x\|^2$ $\square$

Опр. Пусть H – гильбертово пр-во и $x_1, \dots, x_n, \dots$ ортонорм. система в H (т.е. $(x_k, x_p) = \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq p \\ 1, \text{ если } k = p \end{cases}$) и $x \in H$. Тогда говорят, что

1.) $\lambda_k = (x, x_k)$ называется коэфф. Фурье вектора $x \in H$ отн. ортонорм системы $x_1, \dots, x_n, \dots$

2.) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ называется рядом Фурье вектора $x \in H$ по ортонорм. системы $x_1, \dots, x_n, \dots$, где λ_k – коэфф. Фурье вектора x.

Замечание. Говорят, что беск. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ сх-ся, если сх-ся последовательность частичных сумм $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. При этом суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ наз-ся предел частичных сумм: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = \lim\limits_{N \to \infty} S_N = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$

Теорема (нер-во Бесселя) Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ – ортонорм. система в гильбертовом пр-ве H, $x \in H$, $\lambda_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье вектора x. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся, причём $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

Док-во: Обозн. $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Из т. о проектировании на конечномерное под-во $\Rightarrow S_N$ явл. ортогон. проекцией вектора $x \in H$ на под-во $L[x_1, \dots, x_N] = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_N x_N \mid \alpha_k - \text{произв. число}\}$ – лин. оболочка векторов $x_1, \dots, x_N$. Тогда по т. Пифагора:

$\|x\|^2 = \|S_N\|^2 + \|x - S_N\|^2 \geq \|S_N\|^2 = \|\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$

Значит посл-ть частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$ числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ с неотр. коэфф. явл. монотонно возрастающей посл-тью, ограниченной сверху числом $\|x\|^2$. Из матанализа $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся. Значит, мы можем перейти к пределу в нер-ве $\|x\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$. Получим $\|x\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. $\square$

Полные и замкнутые ортонормированные системы. Гильбертов базис

Критерий полноты орт.-норм. системы. Равенство Парсеваля

Опр. Пусть H – гильбертово пр-во и $x_1, \dots, x_n, \dots$ – ортонорм. система в H. Она называется:

1.) **полной**, если нельзя пополнить, т.е. если не существует ещё одной орт.-норм. системы $x, x_1, \dots, x_n, \dots$, называемой пополнением системы $x_1, \dots, x_n, \dots$. Др. словами, она называется полной, если всякий вектор x, который $\perp x_n \ \forall n = 1, 2, \dots$ обязательно равен 0 $(x = 0)$

2.) **гильбертовым базисом**, если $\forall x \in H$ имеем $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье вектора x относительно ортонорм. системы $x_1, \dots, x_n, \dots$

3.) **замкнутой**, если $\forall x \in H$ выполнено равенство $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ – уравнение замкнутости, где $\lambda_k = (x, x_k)$

Теорема – (Критерий полноты ортонорм. системы).

Пусть H – гильбертово пр-во и $x_1, \dots, x_n, \dots$ ортонорм. система в нём. Тогда следующие утв. эквивалентны:

1 – эта ортонорм. система является полной

2 – ——— // ——— гильбертовым базисом

3 – ——— // ——— замкнутой

Док-во: $1 \Rightarrow 2$. Фикс. $x \in H$. Нер-во Бесселя $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$, где $\lambda_k = (x_k, x) \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ – сх-ся. Из мат. анализа знаем критерий Коши сходимости числ. ряда: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon)$ и $\forall p \geq 1$ $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$.

Обозначим $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Тогда $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\|\sum\limits_{k=1}^{n+p} \lambda_k x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|^2 =$

$$= \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k x_k\right\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{т.к. } x_1, \dots, x_n, \dots \text{ – ортонорм. система}}}{=} \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 \leq \varepsilon \Longrightarrow S_1, \dots, S_n, \dots \text{ – фундаментальная посл.}$$

Т.к. H – гильбертово, т.е. полное, поэтому любая фундаментальная посл. сходится. Значит $\exists z \in H : S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z$. Убедимся, что $z = x$, для этого достаточно условия $z - x \perp x_k \ \forall k = 1, 2, \dots \Rightarrow$ в силу полноты системы $x_1, \dots, x_n, \dots$ это означает $z - x = 0$, т.е. $z = x$, $x = z = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, т.е. это будет означать, что $x_1, \dots, x_n, \dots$ – гильбертов базис.

В самом деле: $(z-x,x_k)=(z,x_k)-(x,x_k)=\left(\sum\limits_{p=1}^{\infty}\lambda_p x_p, x_k\right)-\lambda_k \overset{\uparrow}{=}$ непр. по первому аргументу

$=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\lambda_p(x_p,x_k)-\lambda_k=\lambda_k-\lambda_k=0$. Значит $1\Rightarrow 2$

$2\Rightarrow 3$ Т.к. $x_1,\dots,x_n,\dots$ — гильбертов базис, то $\forall\, x,y\in H$ имеем $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$, $\lambda_k=(x,x_k)$ и $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k x_k$, $\mu_k=(y,x_k)$. Тогда

$(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k,y\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x_k,y)=\|(x_k,y)=\overline{(y,x_k)}=\overline{\mu}_k\|=$

$=\underline{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\overline{\mu}_k}$ — равенство Парсеваля. Подставим в него $y=x$:

$\|x\|^2=(x,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\cdot\overline{\lambda}_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$ — это уравнение замкнутости. Значит $2\Rightarrow 3$

Убедимся, что $3\Rightarrow 1$. От противного: пусть $x_1,\dots,x_n,\dots$ замкнута, но не полна. Значит $\exists\, x\in H$, $x\neq 0$ и $x\perp x_k$ $\forall k=1,2,\dots$ Тогда $\|x\|^2=$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}0=0\Rightarrow\|x\|=0\Rightarrow x=0$ — противоречие. Значит $3\Rightarrow 1$

$\square$

Теорема (о существовании гильбертова базиса).

Во всяком сепарабельном гильбертовом пр-ве ненулевой размерности существует гильбертов базис

5.8 Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм гильб. пр-ва

Теорема (Рисса-Фишера): Пусть H-гильб. пр-во, $x_1,\dots,x_n,\dots$ — ортонорм. посл-ть векторов в H и $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots$ — произв. последов. чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2<+\infty$. Тогда $\exists!\, x\in H$: $(x,x_k)=\lambda_k$ $\forall k=1,2,\dots$ и $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$.

Док-во: Обозн. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$. Из п. 5.7, из $1\Rightarrow 2$ мы знаем, что $S_1,\dots,S_n,\dots$ — фундаментальная. Значит $S_1,\dots,S_n,\dots$ — сходится. Обозначим $x=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Убедимся, что x-искомый: $(x,x_k)=$

$=\left(\sum\limits_{p=1}^{\infty}\lambda_p x_p,x_k\right)=\lambda_k$

$\|x\|=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k,x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\underset{\overline{(x,x_k)}=\overline{\lambda}_k}{\underbrace{(x_k,x)}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$

Убедимся, что x - единственный. От противного: пусть $x = \lim_{n\to\infty} S_n$ (как и выше, тогда $\forall k$ $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$) и пусть $\tilde{x} \in H$ такой, что $\lambda_k = (\tilde{x}, x_k)$ $\forall k$ и $\|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Тогда $\|x-\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - 2Re(x,\tilde{x}) + \|\tilde{x}\|^2 =$

$$(x,\tilde{x}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \tilde{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{(\tilde{x}, x_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow \|x-\tilde{x}\| = 0, \text{ т.е. } x - \tilde{x} = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$$

Опр. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пр-ва. Говорят, что H_1 и H_2 _изоморфны_, если существ. $A: H_1 \to H_2$ и $B: H_2 \to H_1$, которые линейны, сохран. скалярн. произв. и взаимно обр., т.е. такие A и B, что $\forall x, y \in H_1$ и $\forall u, v \in H_2$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа выполнено:

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ — линейность

$(A(x), A(y))_{H_2} = (x, y)_{H_1}$ — сохр. ск. произв

$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v)$

$(B(u), B(v))_{H_1} = (u, v)_{H_2}$

$B(A(x)) = x$ и $A(B(u)) = u$ — A и B взаимно обратимы

Замечание Интуитивно утв. „H_1 изоморфно H_2" озн., что H_2 получено из H_1 переобозначением, когда вместо вектора $u = A(x) \in H_2$ пишут $x \in H_1$

Теорема Всякое сепарабельное бесконечномерное гильб. пр-во H (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пр-ву l_2 (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Замечание. $L_2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - сепарабельное бесконечномерное гильб. пр-во. Здесь n - любое и D - любое

Идея док-ва: Фикс. в H гильб. базис $x_1, \dots, x_n, \dots$. Тогда $\forall x \in H$ положим $\lambda_k = (x, x_k)$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2 < +\infty$, значит $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \in l_2$.

Зададим $A: H \to l_2$ по ф-ле: $A(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$

Вопр. №1: почему A лин.? Из лин. ск. произв.

Вопр. №2: почему A сохр. ск. произв.? т.е. почему $(A(x), A(y)) = ((\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots), (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots))_{l_2} = \sum \lambda_n \overline{\mu_n} = (x, y)_H$? Подсказка: это равенство Парсеваля.

Построим $B: l_2 \to H$. По т. Рисса-Фишера $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in l_2$ $\exists!\ x \in H: \lambda_k = (x, x_k)$ и $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, зададим $B: l_2 \to H$ по формуле $B(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = x$

Вопрос №3: почему B линейно?

Вопрос №4: почему B сохр. ск. произв.?

Вопрос №5: почему A и B взаимно обр.?

5.9 Тригонометрическая система функций как пример полной ортонорм. системы в $L_2[-\pi, \pi]$

Напоминание: $L_2[-\pi,\pi] = \left\{ f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \,\middle|\, \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}$

со скалярным произв. $(f,g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

На языке рядов Фурье

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m \\ \pi, & \text{если } m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{если } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0 \quad \forall m, n$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

На языке гильбертовых пр-в

Последов. ф. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots$

$\dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \dots$ — ортонорм. система в $L_2[-\pi,\pi]$

Коэфф. Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Коэфф. Фурье

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0$$

$$\alpha_n = \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \sqrt{\pi}\, a_n$$

$$\beta_n = \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \sqrt{\pi}\, b_n$$

Ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + \dots$$
$$+ \dots + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx + \dots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx +$$
$$+ b_n \sin nx + \dots$$

Равенство Ляпунова

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Равенство Парсеваля

$x\in L_2[-\pi,\pi]$, $\lambda_n=(x,x_n)$

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\alpha_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)=$$
$$=\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}a_0\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\sqrt{\pi}a_n)^2+(\sqrt{\pi}b_n)^2\right]=$$
$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]$$

Из темы ряды Фурье мы знаем, что рав-во Ляпунова верно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Для триг. системы равенство Парсеваля верно $\Rightarrow$ Для триг. системы выполнено ур. замкнутости $\Rightarrow$ Триг. система замкнута $\Rightarrow$ по критерию триг. система яв. полной и яв. гильбертовым базисом.

Бывают ли в $L_2[-\pi,\pi]$ другие базисы? Да.

—— // —— базисы, состоящие из алгебр. многочленов? Да

§6 Ортогональные многочлены

$\boxed{\text{Опр.}}$ Функция $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ a и b могут быть $\pm\infty$ называется весовой функцией (или весом), если выполнены усл.:

1) $h(x)\geq 0$ $\forall x(a,b)$
2) $h(x)>0$ нарушается самое большее в конечном числе т. интервала (a,b)
3) если (a,b) конечный, то $\int_a^b h(x)dx<+\infty$, а если (a,b) - бесконечный, то $\forall n=0,1,2,\dots$ $\int_a^b x^{2n}h(x)dx<+\infty$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ - весовая ф. Весовым пр-ом Лебега $L_2^h(a,b)$ называют $\{f:(a,b)\to\mathbb{R}\text{ (или }\mathbb{C})\mid\int_a^b|f(x)|^2h(x)dx<+\infty\}$ со ск. произв.

$$(f,g)_{L_2^h(a,b)}=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}h(x)dx$$

Замечание. При $h(x)\equiv 1$ получаем „обычное" Лебегово пр-во $L_2(a,b)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если h - вес, то пр-во $L_2^h(a,b)$ яв. гильбертовым

Замечание. Если (a,b) - конечный, то из $\int_a^b h(x)dx<+\infty$ уже следует, что $\forall n=0,1,2,\dots$ $\int_a^b x^{2n}h(x)dx<+\infty$. В самом деле, в этом случае