Равенство Ляпунова

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Равенство Парсеваля

$x \in L_2[-\pi,\pi]$, $\lambda_n = (x, x_n)$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) =$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}a_0\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\sqrt{\pi}a_n)^2 + (\sqrt{\pi}b_n)^2\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

Из темы ряды Фурье мы знаем, что рав-во Ляпунова верно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Для триг. системы равенство Парсеваля верно $\Rightarrow$ Для триг. системы выполнено ур. замкнутости $\Rightarrow$ Триг. система замкнута $\Rightarrow$ по критерию триг. система явл. полной и явл. гильбертовым базисом.

Бывают ли в $L_2[-\pi,\pi]$ другие базисы? Да.

— // — базисы, состоящие из алгебр. многочленов? Да

§6 Ортогональные многочлены

Опр. Функция $h: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ a и b могут быть $\pm\infty$ называется весовой функцией (или весом), если выполнены усл.:

1.) $h(x) \geq 0$ $\forall x (a,b)$

2.) $h(x) > 0$ нарушается самое большее в конечном числе т. интервала (a,b)

3.) если (a,b) конечный, то $\int_a^b h(x)dx < +\infty$, а если (a,b) - бесконечный, то $\forall n = 0,1,2,\ldots$ $\int_a^b x^{2n}h(x)dx < +\infty$

Опр. Пусть $h: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ - весовая ф. Весовым пр-ом Лебега $L_2^h(a,b)$ называют $\left\{f: (a,b) \to \mathbb{R}\,(\text{или } \mathbb{C}) \,\middle|\, \int_a^b |f(x)|^2 h(x)dx < +\infty\right\}$ со ск. произв.

$$(f,g)_{L_2^h(a,b)} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,h(x)dx$$

__Замечание__. При $h(x) \equiv 1$ получаем „обычное" Лебегово пр-во $L_2(a,b)$

Лемма Если h - вес, то пр-во $L_2^h(a,b)$ явл. гильбертовым

__Замечание__. Если (a,b) - конечный, то из $\int_a^b h(x)dx < +\infty$ уже следует, что $\forall n = 0,1,2,\ldots$ $\int_a^b x^{2n}h(x)dx < +\infty$. В самом деле, в этом случае

$\exists M < +\infty : |x^{2n}| \leqslant M_n \ \forall x \in (a,b)$. Значит $\int\limits_a^b x^{2n} h(x)dx \leqslant M \int\limits_a^b h(x)dx < +\infty$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пос-ть многочленов $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x), \ldots$ наз-ся пос-тью ортогональных многочленов с весом $h(x)$ на интервале (a,b), если

1.) $(q_m(x), q_n(x))_{L_2^h(a,b)} = \delta_{mn} \quad \forall m,n$

2.) $\forall n$ $q_n(x)$ явл. многочленом степени n

3.) $\forall n$ старш. коэфф мн-на $q_n(x)$ положителен

6.2 Общие св-ва ортогон. многочленов

В этом разделе считаем, что (a,b) - произволен и $h:(a,b) \to \mathbb{R}$ - произв. вес

Св-во 1: Ортог. многочлены сущ. $\forall h$ и $\forall (a,b)$

Док-во: следует из процесса ортогон. Грама - Шмидта, применённого в $L_2^h(a,b)$ к последов. многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ Разрешим себе, если надо, умножать $q_n(x)$ на (-1) для того, чтобы выполнить усл. 3).

Св-во 2: Любой многочлен $Q(x)$ степени n явл. лин. комбинацией многочленов $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x)$, т.е. $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q_k(x)$

Док-во по индукции:

База - $n=0$: очевидно: $Q = a q_0$

Шаг индукции: доп., что утв. верно для n и докажем его для $n+1$:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = a_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{\text{по предполож. инд.}} = a_{n+1} \frac{1}{C_{n-1}} \Big[q_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k q_k(x)\Big] + \sum_{k=0}^{n} b_k q_k(x) \ \square$$

$$q_{n+1}(x) = C_{n-1} x^{n+1} + \underbrace{C_n x^n + \ldots}_{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k q_k(x)} \qquad \sum_{k=0}^{n} b_k q_k(x)$$

Св-во 3: Если $L[1, x^1, \ldots, x^n] \stackrel{def}{=} \Big\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, где a_k - произв. числа$\Big\}$ - лин. оболочка мономов $1, x^1, \ldots, x^n$ и если $L[q_0, q_1, \ldots, q_n] \stackrel{def}{=}$ $= \Big\{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k q_k(x)$, где $b_0, \ldots, b_n$ - любые числа$\Big\}$ - лин. оболочка мн-ов $q_0, \ldots, q_n$, то $L[1, x^1, \ldots, x^n] = L[q_0, q_1, \ldots, q_n]$

Док-во: $L[1, \ldots, x^n] \subset L[q_0, \ldots, q_n]$. $\forall Q \in L[1, \ldots, x^n]$ ст. $Q \leqslant n$ по св-ву 2: $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k q_k(x)$, где $m \leqslant n$. Значит $Q \in L[q_1, \ldots, q_n]$

$L[q_0,\dots,q_n]\subset L[1,\dots,x^n]$ — очевидно. $\forall Q\in L[q_0,\dots,q_n]\Rightarrow Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k q_k(x)=$

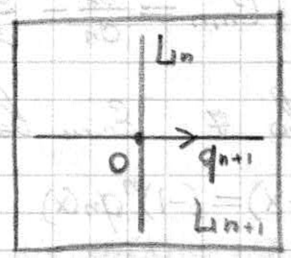
$$=\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\sum_{p=0}^{k} b_{p,k}x^p\right)=\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{p,k}\right)x^p\in L[1,\dots,x^n]$$

(n (при $p>k$ просто 0))

Свойство 4: Посл-ть ортогональных многочленов определяется весом h однозначно., т.е. если $q_0(x),\dots,q_n(x),\dots$ и $\tilde q_0(x),\tilde q_1(x),\dots,\tilde q_n(x),\dots$ две послед. орт. многочленов с одним и тем же весом h, то $\forall n=0,1,2,\dots$ $q_n(x)=\tilde q_n(x)$

Док-во: по индукции. База $n=0$, тогда q_0 и $\tilde q_0$ — положит. постоянные, такие, что: $(q_0,q_0)_{L_2^h(a,b)}=\int_a^b q_0^2h(x)dx=1=\int_a^b\tilde q_0^2h(x)dx=$
$=(\tilde q_0,\tilde q_0)\Rightarrow q_0^2=\tilde q_0^2\Rightarrow q_0=\tilde q_0$

Шаг. инд.: предположим, что св-во 4 выполнено для некоторого n и убедимся, что оно выполняется для $n+1$. Обозн. $\forall n\ L[1,\dots,x^n]\overset{\text{св-во 3}}{=}L[q_0,\dots,q_n]$. q_{n+1} и $\tilde q_{n+1}$ лежат в L_{n+1} и ортог. L_n. Из лин алгебры $\Rightarrow\dim L_{n+1}=n+1$, $\dim L_n\Rightarrow$ размерность ортог. дополн. L_n в L_{n+1} равна 1. q_{n+1} и $\tilde q_{n+1}$ лежат в этом ортог дополнении и они имеют одинаковую длину (=1) и ещё у них старшие коэффициенты положительны. Значит $q_{n+1}=\tilde q_{n+1}$ □



$q_0, q_1(x),\dots,q_n(x),\dots$ — посл-ть ортогональных многочленов с весом h

Св-во 5: Если $Q(x)$ — любой мн-н степени m то $\forall n>m$ имеем
$$(Q(x),q_n(x))_{L_2^h(a,b)}=\int_a^b h(x)Q(x)q_n(x)dx=0$$

Док-во:

По св-ву 2 $\Rightarrow Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_kq_k(x)$. Значит $\int_a^b Q(x)q_n(x)h(x)dx=$
$$=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{m}c_kq_k(x)\right)q_n(x)h(x)dx=\sum_{k=0}^{m}c_k\int_a^b q_k(x)q_n(x)h(x)dx=0$$

Св-во 6 (Трёхчленная рекуррентная формула)

Пусть $q_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\dots$

Тогда $xq_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}q_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)q_n(x)+\frac{a_{n-1}}{a_n}q_{n-1}(x)$

$n+1 \to \infty$ (просто будут 0 коэфф.)

Док-во: Свойство 2 $\Rightarrow x q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_{n,k} q_k(x)$, где $c_{n,k} = (x q_n(x), q_k(x))_{L_2^h(a,b)}$

Свойства $c_{n,k}$: а.) $c_{n,k} = 0 \ \forall k > n+1$

б.) $c_{n,k} = (x q_n, q_k) = \int\limits_a^b h(x) x q_n q_k \, dx = (x q_k, q_n) = c_{k,n}$

в.) $c_{n,k} = 0 \ \forall n > k+1$, т.к. $c_{n,k} = c_{k,n} = 0$

Из а.) – в.) $\Rightarrow c_{n,k} = 0 \ \forall n,k$ кроме $k = n-1, n, n+1$

Значит $x q_n(x) = c_{n,n+1} q_{n+1}(x) + c_{n,n} q_n(x) + c_{n,n-1} q_{n-1}(x)$

$x(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) = c_{n,n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \ldots) + c_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) +$
$+ c_{n,n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots)$

1.) x^{n+1}: $a_n = c_{n,n+1} \cdot a_{n+1} \quad \Longrightarrow c_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$

2.) x^n: $b_n = c_{n,n+1} b_{n+1} + c_{n,n} a_n \qquad c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

2.) $\Rightarrow c_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{\cancel{a_n}} \cdot \frac{\cancel{a_n}}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$

Св-во 7: Если вес $h: (-a,a) \to \mathbb{R}$ и явл. чётной ф., то $\forall n = 0,1,2$ $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x) \ \forall x (-a,a)$. Т.е. если n – чётное, то q_n – чётный (то есть содержит x только в чётн. степени), а если n – нечётное, то $q_n(x)$ – нечётный (т.е. содержит x только в нечётн. степенях)

Д-во: Обозн. $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$. Надо док-ать, что $\tilde{q}_n(x) = q_n(x)$. Это будет следовать из того, что $\tilde{q}_n(x)$ явл. ортогон. мн-членами с весом $h(x)$ и из того, что ортогон. многочлены определяются весом однозначно.

1.) $\tilde{q}_n(x)$ явл. мно-ном степени n

2.) старш. коэфф. $\tilde{q}_n(x) =$ старш. коэфф. $q_n(x) > 0$

3.) $(\tilde{q}_m(x), \tilde{q}_n(x))_{L_2^h(-a,a)} = \int\limits_{-a}^{a} \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = (-1)^{m+n} \int\limits_{-a}^{a} q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx =$

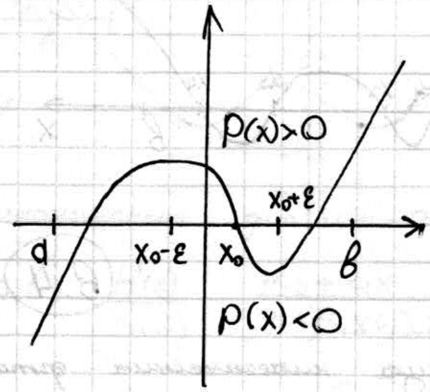
$= |$ замена $x \to -x| = (-1)^{n+m} \int\limits_{a}^{-a} q_m(x) q_n(x) \underset{h(x)}{\underset{\parallel}{h(-x)}} d(-x) = (-1)^{n+m} \int\limits_{-a}^{a} q_m(x) q_n(x) h(x) dx =$

$= (-1)^{m+n} \delta_{mn} = \delta_{mn} \quad \forall m,n \quad \square$

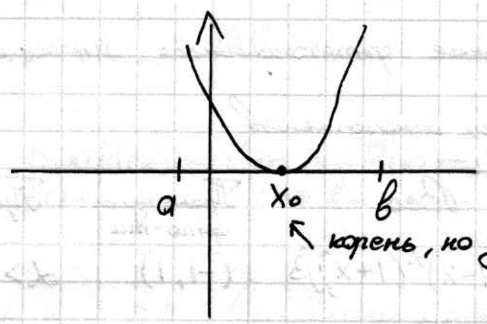
(6.3) Св-ва нулей ортогональных многочленов

Напоминание Если P — многочлен, и $x_0 \in \mathbb{C}$: $P(x_0)=0$, то x_0 — ноль многочлена или корень многочлена. При этом $\exists n \geqslant 1$: $P(x)=(x-x_0)^n Q(x)$, $Q(x_0)\neq 0$. Это n — кратность нуля. Если $n=1$, то ноль простой.

Опр Гов., что $x_0 \in (a,b)$ явл. т. перемены знака мн-на $P(x)$ на (a,b), если $\exists \varepsilon>0$: либо $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0)\cap(a,b)$ $P(x)>0$ и $\forall x\in(x_0,x_0+\varepsilon)\cap(a,b)$ $P(x)<0$, либо $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0)\cap(a,b)$ $P(x)<0$ и $\forall x\in(x_0,x_0+\varepsilon)\cap(a,b)$ $P(x)>0$



Замечание. Всякая точка перемены знака явл. корнем мн-на, обратное неверно.



корень, но знак не меняется

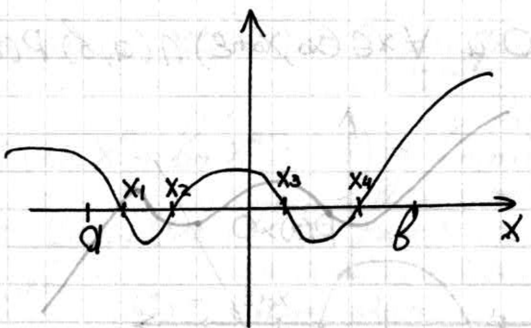
Теорема. Пусть $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ — произв. вес и $q_0, q_1(x), \ldots, q_n(x)$ — посл-ть ортогон. мн-нов с весом h. Тогда $\forall n\geqslant 1$ все корни многочлена $q_n(x)$ веществ., простые, и лежат в открытом интервале (a,b)

Док-во: Фикс. $n\geqslant 1$. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — все т. перемены знака мн-на $q_n(x)$, лежащие в (a,b). Убедимся, что хоть одна такая т. есть. От противного: допустим точек перемен знака нет. Тогда $0=(q_0,q_n)_{L_2^h(a,b)} =$
$= \int_a^b \underset{>0}{q_0}\, \underset{\text{либо}>0,\ \text{либо}<0}{q_n(x)}\, \underset{\geqslant 0}{h(x)}\,dx = \begin{matrix}\text{либо} >0\\ \text{либо} <0\end{matrix}$ — противоречие.

Построим вспомогательный мн-член $Q_m(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_m)$, ст. $Q_m=m\leqslant$ $\leqslant n=\text{ст}\, q_n$. Если $m=n$, то всё доказано. Допустим, что $m<n$. Тогда по св-ву 2 из п. 6.2 имеем $0=(Q_m(x),q_n(x))_{L_2^h(a,b)}=\int_a^b \underbrace{Q_m(x)q_n(x)}_{\text{не меняет знак}}\underset{\geqslant 0}{h(x)}\,dx$ $= \begin{matrix}\text{либо} >0\\ \text{либо} <0\end{matrix}$ — противоречие. Значит $m<n$ невозможно $\Rightarrow m=n$ $\square$

Следствие: $\varphi_n(b)>0$ и $(-1)^n\varphi_n(a)>0$

$\boxed{\text{Теорема}}$: Нули последовательных ортогональных многочленов перемешаются, т.е. если $x_1<\ldots<x_n$ — нули мн-на $\varphi_n(x)$, то в каждом $n+1$ открытом интервале $(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_n,b)$ содержится и равно один корень мн-на $\varphi_{n+1}(x)$.



6.4 Классические ортогональные многочлены

Таблица классических ортогональных многочленов

№	Название	Обозначение	Вес	Промежуток орто-ти	Примечание
1	Мн-ны Якоби	$P_n(x;\alpha,\beta)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$(-1,1)$	$\alpha>-1$ $\beta>-1$
2	Мн-ны Эрмита	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$(-\infty,+\infty)$	
3	Мн-ны Лагерра	$L_n^\alpha(x)$	$x^\alpha e^{-x}$	$(0,+\infty)$	$\alpha>-1$
4	Ультрасферические много-ны или многочлены Гегенбауэра	$C_n(x,\lambda)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$(-1,1)$	Явл. частным случаем мн-нов Якоби, $\lambda>-\frac{1}{2}$
5	Мн-ны Чебышёва I рода	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	Явл. частным случаем мн-нов Гегенбауэра и мн-нов Якоби
6	Мн-ны Чебышёва II рода	$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$	—//—
7	Мн-ны Лежандра	$P_n(x)$	1	$(-1,1)$	—//—

$\boxed{\text{Опр}}$. Пусть $\varphi_0,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ — посл-ть орто. мн-ов, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — любая посл-ть ненулевых вещ. чисел. Тогда гов., что последов. $\alpha_0\varphi_0,\alpha_1\varphi_1,\ldots,\alpha_n\varphi_n,\ldots$ — получены в результате стандартизации исходн. посл-ти $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$

Замечание. Стандартизация не меняет множества св-в ортогональных многочленов (напр. св-ва нулей), но приводит к упрощению формул.

Примеры стандартизации: 1.) $\int_a^b q_n^2(x)h(x)dx=1$ $\forall n$ и ст. коэф. $q_n(x)>0$

2.) ст. коэф. $q_n(x)=1$

3.) $q_n(b)=1$ $\forall n$

4.) - с помощью производящей ф.

$\boxed{\text{Опр}}$. ф. $w(t,x)$ - производящая ф. посл-ти ортогональных многочленов $q_0, q_1(x), \dots, q_n(x), \dots$, если $w(t,x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{q_n(x)}{b_n}t^n$

Обзор св-в. кл. ортогональных мн-ов:

1.) - Если h - весовая ф. каких-нибудь классических. орт. мн-ов, то $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $\forall x\in(a,b)$ $\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{\alpha_0+\alpha_1 x}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2}\overset{\text{опр}}{=}\frac{A(x)}{B(x)}$ (*) - уравнение Пирсона

и $\lim\limits_{x\to a+}h(x)B(x)=\lim\limits_{x\to b-}h(x)B(x)=0$ (**) - предельные условия для уравнения Пирсона

2.) Если * и ** выполнены хоть с какими-то числами $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta$ то вес h совпадает (с точное до лин. замены) с одной из весовых ф. кл. орт. мн-ов из табл.

3.) Если $q_0, q_1(x), \dots, q_n(x)$ - орт. многочлены с весом h и для них выполнено * и **, то

3₁) Функция $y=q_n(x)$ явл. частным решением:

$$B(x)y''(x)+[A(x)+B'(x)]y'-\lambda_n y(x)=0, \text{ где } \lambda_n=n(\alpha_1+(n+1)\beta_2)$$

3₂) $\forall n$ $q_n(x)=\frac{c_n}{h(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[h(x)B^n(x)\right]$, где c_n - некоторая постоянная

формула Родрига.

3₃) $\forall m\geq 1$ посл-ть мн-ов $\frac{d^m}{dx^m}q_m(x), \frac{d^m}{dx^m}q_{m+1}(x), \dots, \frac{d^m}{dx^m}q_{m+n}(x), \dots$ - это тоже посл-ть классических орт. многочленов на том же промежутке, но с другим весом.

3₄) У мн-ов $q_0, q_1(x), \dots, q_n(x), \dots$ имеется производящая ф., выраженн. в элементарных функциях.

6.5 Многочлены Лежандра и рекурентные соотношения

Опр. $\omega(t,x) \overset{\text{опр.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ – опр. многочленов Лежандра

$P_n(x)$, стандартизованных с помощью производящей ф.

<u>Замечание</u>. С этого момента и до конца 8б $P_n(x)$ будет обозначать мн-ны Лежандра, стандарт. с помощью производящей ф.

План: убедимся, что $P_n(x)$ – мн-н степени n с положит. ст. коэффиц., причём $(P_n(x), P_m(x))_{L_2(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \alpha_n \delta_{nm}$

Тогда (в силу того, что ортог. мн-ны опр. весом и промежутком орт-ти однозначно) $P_n(x)$ будет мн-ом Лежандра и табл. п. 6.4, стандарт. с помощью произв. ф.

Из мат. анализа $\Rightarrow$ ф-ла Тейлора $\Rightarrow \omega(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega(t,x)\right]_{t=0} t^n$

Значит $P_0(x)=1$

$\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} = \frac{x-t}{1-2tx+t^2}\omega(t,x) \Rightarrow P_1(x) = x$

Подставим $\omega(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ в ф-лу $(1-2tx+t^2)\frac{\partial\omega}{\partial t} - (x-t)\omega(t,x) = 0$

$(1-2tx+t^2)\sum\limits_{n=\cancel{0}1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} - (x-t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$

Раскроем скобки и приведём подобные при t^k:

$(k+1)P_{k+1} - 2xkP_k + (k-1)P_{k-1} - xP_k(x) + P_{k-1} = 0$

Приведём подобные и заменим $n \to k$ (вместо „k" будем писать „n")

$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$ (1) $\forall n \geq 1$

<u>Замечание</u>. Мы всё ещё не знаем, что P_n – мн-н, но когда это докажем, то (1) окажется требуемой рекурентной формулой для мн-ов Лежандра, стандарт. с помощью произв. ф.

<u>Лемма</u> $\forall n \geq 0$ $P_n(x)$ явл. мн-м степени n с положит. старшим коэфф.

Докажем по индукции: База инд.: $n=0,1$, уже знаем, что выполнено

Допустим, что утв. т. верно для $P_0, P_1(x), \dots, P_n(x)$ и убедимся, что оно верно для $P_{n+1}(x)$

Из ① $\Rightarrow P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$ — мн-н. ст. $n+1$ с положит. ст. коэфф. $\square$

$$\frac{\partial}{\partial x} w(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2)t = \frac{t w(t,x)}{1-2tx+t^2}$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial x} w(t,x) - t w(t,x) = 0$$

$$(1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0$$

Соберу подобные при t^k:

$$P_k'(x) - 2x P_{k-1}'(x) + P_{k-2}'(x) - P_{k-1}(x) = 0$$

Изменим индекс $n+1 \longrightarrow k$

$$P_{n+1}'(x) - 2x P_n'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0 \quad \Big| \cdot n \quad \Big| \cdot (n+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(①) = (n+1) P_{n+1}' - (2n+1) P_n - (2n+1) x P_n' + n P_{n-1}' = 0 \quad \Big| \cdot(-1) \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$-P_{n+1}' + x P_n'(x) + (n+1) P_n(x) = 0 \quad ②$$

$$+ \quad -x P_n' + P_{n-1}'(x) + n P_n(x) = 0 \quad ③$$

$(2n+1) P_n(x) = P_{n+1}' - P_{n-1}'$ — вторая рекурентная ф-ла мн-на P_n

6.6 Дифференциальное уравнение и соотношение ортогональности для мн-ов Лежандра

② $n \longrightarrow n+1$

$$-P_{n(x)}' + x P_{n-1}'(x) + n P_{n-1}(x) = 0 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$+$$

③ $\Rightarrow -x P_{n(x)}' + P_{n-1}'(x) + n P_n(x) = 0 \quad \Big| \cdot x$

$$P_n'(x)(1-x^2) + n x P_n(x) - n P_{n-1}(x) = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\left[(1-x^2) P_n'\right]' + n P_n(x) + \underbrace{\cancel{n x P_n'(x) - n P_{n-1}'(x)}}_{\overset{③}{=} \cancel{x P_n'} - n P_n(x)} = 0$$

$$\left[(1-x^2) P_n'\right]' + n(n+1) P_n = 0$$

Значит ф. $P_n(x)$ удовл. дифф-му ур.:

$\left[(1-x^2) y'\right]' + n(n+1) y = 0$ — дифф. ур. для мн-ов Лежандра.

$$[(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n = 0 \quad \Big| \cdot P_m$$

$$[(1-x^2)P_m']' + m(m+1)P_m = 0 \quad \Big| \cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)P_n']'P_m - [(1-x^2)P_m']'P_n}_{\overset{def}{=} A} + \underbrace{[n(n+1)-m(m+1)]}_{\overset{def}{=} B} P_m P_n = 0$$

Преобразуем A и B: $[(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')]' = [\underbrace{(1-x^2)P_n'P_m}]' - [\underbrace{(1-x^2)P_m'P_n}]' =$

$$= [(1-x^2)P_n']'P_m + \cancel{[(1-x^2)P_n']P_m'} - [(1-x^2)P_m']'P_n - \cancel{[(1-x^2)P_m']P_n'} = A$$

$$(n-m)(n+m+1) = n^2 + \cancel{nm} + n - \cancel{mn} - m^2 - m$$

$$B = ((n+1)n - m(m+1)) = n^2 + n - m^2 - m$$

$$A + B \cdot P_m \cdot P_n = 0 \quad \Big| \int_{-1}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} [(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')]'dx + (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

$\|$

0, из-за $1-x^2$

$\|$

$(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')\Big|_{-1}^{1}$

Если $m \neq n$, то $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$, т.е.

$P_n \perp P_m$ в пр-ве $L_2^h(-1,1)$ с $h=1$

Подведём итог: $w(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, затем мы убедились, что $\forall n$ $P_n(x)$ – мн-н степени n с положит. старшим коэфф., и эти мн-ны ортогональны в $L_2^h(-1,1)$ с весом $h \equiv 1$. Но такие орт. мн-ны мы называли мн-нами Лежандра (см. таблицу). Значит $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ действительно является последовательностью мн-нов Лежандра, стандарт. с помощью производящей функции.

Теперь вычислим $\|P_n\|^2_{L_2^h(-1,1)}$: $(P_n, P_n) = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - \underline{(2n+1)xP_n(x)} + nP_{n-1}(x) = 0 \quad \Big| (2n-1)P_{n-1}$$

Замена индекса $n+1 \longrightarrow n \Rightarrow nP_n(x) - \underline{(2n-1)xP_{n-1}(x)} + (n-1)P_{n-2}(x) = 0$

$\Big| (2n+1)P_n$

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + n(2n-1)P_{n-1}^2(x) - n(2n+1)P_n^2 - (n-1)(2n+1)P_nP_{n-2} = 0 \quad \Big| \int_{-1}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} [n(2n-1)P_{n-1}^2(x) - n(2n+1)P_n^2]dx = 0$$

$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx \quad \forall n \geq 2$, т.к. в рекуррентных ф. используется P_{n-2}

$$\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)dx = \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\cdot\frac{\cancel{2n-3}}{\cancel{2n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{5}\int_{-1}^{1} \underbrace{P_1^2(x)}_{=x^2}dx =$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

Мы доказали это рав-во $\forall n \geq 2$

Для $n=1$: $\int_{-1}^{1} P_1^2 dx = \frac{2}{3}$ Для $n=0$ $\int_{-1}^{1} P_0^2 dx = 2$

Т.о. $\forall n \geq 0$ $\boxed{\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = (P_n, P_m) = \delta_{nm}\frac{2}{2n+1}}$ — соотношение ортого-ти для мн-нов Лежандра, станд-нных с помощью производящей функции

6.7 Мн-ны Лежандра: формула Родриго и теорема о разложении ф. в ряд по мн-нам Лежандра

Теорема (ф. Родриго): $\forall n \geq 1$ $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$, где P_n - мн-н Лежандра, стандарт. с помощью произв. ф. $Q_n(x)$

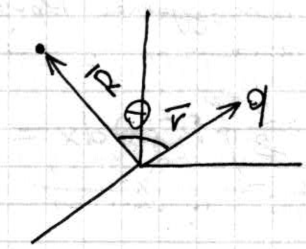
Идея док-ва: Нужно убедиться, что $Q_n(x)$ явл. мн-ном степени n с положит старш. коэфф. и $\underbrace{\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx}_{\text{берётся по частям}} = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$. Т.к. орт. мн-ны определяются весом однозначно, то $P_n(x) = Q_n(x)$ $\forall n$

Теорема (о разложении ф. в ряд по мн-нам Лежандра). Если $f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ и явл. дважды непр. дифф-ой ф., то $\forall x \in [-1,1]$ справедливо равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$, где $c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$, где P_n - мн-ны Лежандра, станд. с помощью произв. ф.

<u>Замечание</u>: эта теорема очевидна, если рав-во $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ понимать в пр-ве $L_2^h(-1,1)$, где $h \equiv 1$. Там оно означает $\|f - \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n\|_{L_2^h(-1,1)} = 0$

В самом деле посл. мн-нов: $\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|}, \ldots, \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \ldots$ явл. орт. базисом в $L_2^h(-1,1)$. Значит, $\forall f \in L_2^h(-1,1)$ разлагается в ряд по этим мн-нам: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{P_n}{\|P_n\|}$, где $\lambda_n = \left(f, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right) = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|}$ или $f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}P_n$

Мультипольное разложение Кулоновского потенциала



Заряд q нах-ся в т. с радиус-вект. $\overline{r}$, $r=|\overline{r}|$.

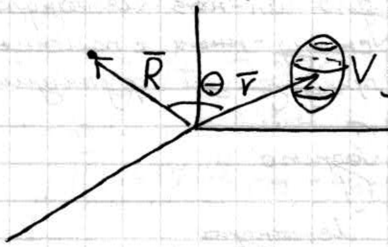
Наблюдатель нах-ся в т. $\overline{R}$, $R=|\overline{R}|>r$

Θ - угол между $\overline{r}$ и $\overline{R}$

Кулоновский пот. з. q в т. $\overline{R}$ равен $\varphi(\overline{R}) = \frac{q}{|\overline{R}-\overline{r}|} = \frac{q}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\Theta}} =$

$$= \frac{q}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{2\frac{r}{R}}_{2t}\underbrace{\cos\Theta}_{x}+\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2}_{t^2}}} = \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\Theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

произв. ф-я



$\rho(\overline{r})$ - плотность заряда

Кулоновский потенциал в т. $\overline{R}$ равен.

$$\varphi(\overline{R}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n}{R^{n+1}},\ \text{где}\ \sigma_n = \iiint\limits_V \rho(\overline{r})P_n(\cos\Theta)r^n dV$$

Для σ_n есть соотв. назв.:

$\sigma_0 = \iiint\limits_V \rho(\overline{r})dV$ - полный заряд

$\sigma_1 = \iiint\limits_V \rho(\overline{r})(\cos\Theta)r\,dV$ - дипольный момент

$\sigma_2 = \iiint\limits_V \rho(\overline{r})\frac{3\cos^2-1}{2}r^2 dV$ - квадрупольный момент

§7 Ограниченные операторы в гильбертовом пр-ве

В этом параграфе $H, H_1, H_2, \ldots$ обозн. гильбертово пр-во.

7.1 Линейные операторы и их простейшие св-ва:

$\boxed{\text{Опр}}$: Отобр. $A: H \longrightarrow H_1$ наз. лин. оператором, если $\forall\alpha,\beta$ - числа, $\forall x,y\in H$ справедливо равенство $A(\alpha x+\beta y) = \alpha A(x)+\beta A(y)$

||| обозн

Ax, y коротких аргументов скобки не пишут.

Примеры лин. операторов:

1.) Тождественный оператор $I: H\to H$ задаётся как $Ix = x$ $\forall x\in H$.

Убедимся в лин-ти: $I(\alpha x+\beta y) = \alpha x+\beta y = \alpha Ix+\beta Iy$

2.) Нулевой оператор $O: H\to H_1$ задаётся как $Ox = 0$ $\forall x\in H$

Убедимся в лин-ти: $O(\alpha x+\beta y) = 0 = \alpha Ox+\beta Oy$