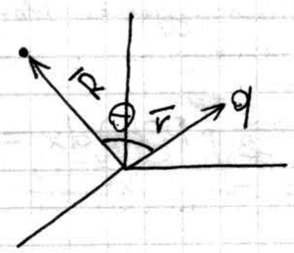
Мультипольное разложение Кулоновского потенциала



Заряд q нах-ся в т. с радиус-вект. $\bar{r}$, $r=|\bar{r}|$.

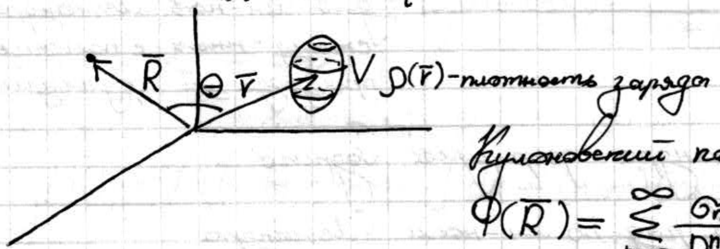
Наблюдатель нах-ся в т. $\bar{R}$, $R=|\bar{R}|>r$

Θ – угл. между $\bar{r}$ и $\bar{R}$

Кулоновский пот. д. q в т. $\bar{R}$ равен $\varphi(\bar{R})=\dfrac{q}{|\bar{R}-\bar{r}|}=\dfrac{q}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\Theta}}=$

$$=\frac{q}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{2\frac{r}{R}}_{2t}\underbrace{\cos\Theta}_{x}+\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2}_{t^2}}}=\frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\Theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

произв. ф-я



Кулоновский потенциал в т. $\bar{R}$ равен.

$$\varphi(\bar{R})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n}{R^{n+1}},\ \text{где}\ \sigma_n=\iiint_V\rho(\bar{r})P_n(\cos\Theta)r^n\,dV$$

Для σ_n есть соответ. назв.:

$\sigma_0=\iiint_V\rho(\bar{r})\,dV$ – полный заряд

$\sigma_1=\iiint_V\rho(\bar{r})(\cos\Theta)\,r\,dV$ – дипольный момент

$\sigma_2=\iiint_V\rho(\bar{r})\dfrac{3\cos^2-1}{2}r^2\,dV$ – квадрупольный момент

§7 ограниченные операторы в гильбертовом пр-ве

В этом параграфе $H, H_1, H_2, \dots$ обозн. гильбертово пр-во.

7.1 Линейные операторы и их простейшие св-ва:

Опр: Отобр. $A: H\to H_1$ наз. лин. оператором, если $\forall\alpha,\beta$ – числа, $\forall x,y\in H$ справедливо равенство $A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$

обозн. Ax, y коротких аргументов скобки не пишут.

Примеры лин. операторов:

1.) Тождественный оператор $I: H\to H$ задаётся как $Ix=x\ \forall x\in H$

Убедимся в лин-ти: $I(\alpha x+\beta y)=\alpha x+\beta y=\alpha Ix+\beta Iy$

2.) Нулевой оператор $O: H\to H_1$ задаётся как $Ox=0\ \forall x\in H$

Убедимся в лин-ти: $O(\alpha x+\beta y)=0=\alpha Ox+\beta Oy$

3.) Конечномерный оператор : $A: H \to H_1$ и $\dim H < +\infty$, $\dim H_1 < +\infty$

4.) Оператор ортогонального проектирования: Пусть S - замкнутое под-во в H. Мы знаем, что $H = S \oplus S^\perp$, т.е. $\forall x \in H\ \exists! y \in S$ и $\exists! z \in S^\perp : x = y + z$.

Оператор P ортог. проектирования пр-ва H на пр-во S задаётся формулой $Px = y$. Убедимся, что P линейный. Пусть $x_1, x_2 \in H$, α_1, α_2 - числа $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{?}{=} \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$. Тогда $\exists! y_1, y_2 \in S$ и $\exists! z_1, z_2 \in S^\perp$:

$x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$. Тогда $Px_1 = y_1$ и $Px_2 = y_2$, $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) \underset{\text{аксиомы лин. пр-ва}}{=} \overbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}^{\in S} + \overbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}^{\in S^\perp} \Rightarrow P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P$ - линейный

5.) Интегральный оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ задаётся формулой $(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, где $K(t,s)$ - некоторая фикс, заранее заданная ф., называемая ядром опер. A. Если ядро K таково, что этот интегр. сх-ся $\forall x \in L_2[a,b]$, то опер. A линеен в силу линейности интеграла.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $A, B: H \to H_1$ - лин. опер. Тогда $\forall \alpha, \beta$ - числа зададим новый оператор $\alpha A + \beta B: H \to H_1$ по формуле $(\alpha A + \beta B)x \overset{def}{=} \alpha Ax + \beta Bx$

Св-во 1: Оператор $\alpha A + \beta B$ - линеен.

Док-во: $(\alpha A + \beta B)x = (\alpha A + \beta B)(\overset{\text{числа}}{sy + tz}) \overset{\text{опр}}{=} \alpha A(sy + tz) + \beta B(sy + tz) \overset{A,B\text{-лин.}}{=}$
$= \alpha(sAy + tAz) + \beta(sBy + tBz) = s(\alpha Ay + \beta By) + t(\alpha Az + \beta Bz) =$
$= s(\alpha A + \beta B)y + t(\alpha A + \beta B)z$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H_1 \to H_2$ - лин. опер. Зададим новый опер. $BA: H \to H_2$ по формуле $(BA)x \overset{def}{=} B(Ax)$ - опер. произведения или суперпозиции опер-ов A и B.

Св-во 2: Опер. BA - линейный

Док-во: $(BA)(\alpha x + \beta y) \overset{def}{=} B(A(\alpha x + \beta y)) \overset{A\text{-лин.}}{=} B(\alpha Ax + \beta Ay) \overset{B\text{-лин.}}{=} \alpha B(Ax) +$
$+ \beta B(Ay) = \alpha(BA)x + \beta(BA)y \Rightarrow BA$ - лин. опер.

<u>Замечание</u>. Лин. операторы играют важную роль в квантовой механике.

7.2 Непрерывные и ограниченные операторы

Опр. Оператор $A: H \to H_1$ наз-ся <u>непр. в т. $x_0 \in H_1$</u>, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: из $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Др. словами: если из $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ следует, что $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax_0$

<u>Замечание</u>. Два опр. непр. эквивалентны

Опр. Оператор $A: H \to H_1$ наз. <u>непр.</u>, если он непр. в любой т. $x_0 \in H$

Опр. Мн-во $X \subset H$ наз-ся <u>огр.</u> если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса. Др. словами: если $\exists R < +\infty$ $\forall x \in X$ имеем $\|x\| < R$

<u>Замечание</u> В первой части опр. центр. шара любой, а во второй части центр в т. $O \Rightarrow$ почему эти опр. экнив-ны?

Опр. Опер. $A: H \to H_1$ наз. <u>ограниченным</u>, если он переводит всякое огр. мн-во в ограниченное, т.е. если $\forall X \subset H$ огр. мн-во $AX \overset{\text{опр}}{=}$ $= \{y \in H_1 \mid \exists x \in H: y = Ax\}$ явл. огр. мн-ом в H_1

Теорема о непр. и огр. оператора.

Пусть H, H_1 – сепараб. гильбертовы пр-ва, $A: H \to H_1$ – лин. оператор.
Тогда след. утв. эквивалентны:

1) $\exists x_0 \in H$: A непр. в т. x_0;

2) A – непр.

3) A – огр.

4) $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$

Док-во:

$1 \Rightarrow 2$ Дано, что A непр. в т. x_0, т.е., что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Нужно убедиться, что A непр. в любой т. $x_1 \in H$, т.е. нужно убедиться, что $\forall y \in H$: $\|y - x_1\| < \delta_1 \Rightarrow \|Ay - Ax_1\| < \varepsilon_1$. Будем брать $\varepsilon_1 = \varepsilon$ для $\delta_1 = \delta$. Пусть $\|\underset{\pm x_0}{y} - x_1\| < \delta$, т.е. $\|\underbrace{(y - x_1 + x_0)}_{\text{обозн } X} - x_0\| < \delta$ значит $\|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| < \varepsilon$, т.к. A – лин., то $\|Ay - Ax_1 + \cancel{Ax_0} - \cancel{Ax_0}\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ непр. в т. $x_1 \Rightarrow$ в силу произвольности x_1: A – непр.

(2 ⟹ 3) Дано: A - непр. Значит A непр. в т. $x_0=0$. Следовательно, $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $\|x-0\|<\delta \Rightarrow \|Ax-0\|<\varepsilon$. Поэтому $\forall x\in H$: $\|x\|<\delta$ имеем $\|Ax\|<1$
$\varepsilon=1$

Надо док-ать, что A - огр. т.е. что $\forall X\subset H$ - огр. мн-во имеем AX - огр.

Фикс. X - огр. Тогда $\exists R<+\infty$: $\forall x\in X$ $\|x\|\leq R$. Тогда $\forall y\in AX$ $\exists x\in X$: $y=Ax \Rightarrow \|y\|=\|Ax\|=\|\frac{R}{\delta}A(\frac{\delta}{R}x)\|\leq\frac{R}{\delta}\cdot 1<+\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow AX$ - огр. □ $\qquad \|\frac{\delta}{R}x\|=\frac{\delta}{R}\|x\|\leq\frac{\delta}{R}R\leq\delta$

(3 ⟹ 4) Дано: A - огр., т.е. AX явл. огр. $\forall X$ - огр. $\overline{B}(0,1)$ - огр. мн-во.

Значит $A(\overline{B}(0,1))$ - огр. мн-во, т.е. $\exists R<+\infty$: $\forall y\in A(\overline{B}(0,1))$ имеем $\|y\|<R$
$\Updownarrow$
$\exists x\in\overline{B}(0,1)$: $y=Ax \Leftrightarrow \exists \|x\|\leq 1$: $y=Ax$

Т.о. $\|Ax\|=\|y\|\leq R$

$\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|\leq R<+\infty$ □

(4 ⟹ 1) Дано: $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|=R<+\infty$. Убедимся, что опер. A непр. в т. x_0, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\|x\|<\delta\Rightarrow\|Ax\|<\varepsilon$. Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{R}$. Тогда $\forall x\in H$: $\|x\|<\delta=\frac{\varepsilon}{R}$ имеем $\|Ax\|=\|(\frac{R}{\varepsilon})^{-1}A((\frac{\varepsilon}{R})^{-1}x)\|=\frac{\varepsilon}{R}\|A(\frac{R}{\varepsilon}x)\|\leq\frac{\varepsilon}{R}\cdot\sup\limits_{\|y\|\leq 1}\|Ay\|=\varepsilon$.

$\|\frac{R}{\varepsilon}x\|=\frac{R}{\varepsilon}\|x\|<1$

Значит A - непр. в т. $x_0=0$ □

7.3 Норма оператора

Изучим $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$ более внимательно, ведь конечность этого числа эквив. непр-ти A.

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если $A: H\to H_1$ - лин. опер. то

$$\underbrace{\sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|}_{\alpha}=\underbrace{\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|}_{\beta}=\underbrace{\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\gamma}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Общее значение α,β,γ - норма оператора A и обозн. $\|A\|$
или операторная норма

Док-во: План: $\alpha\geq\beta\geq\gamma\geq\alpha$

$\alpha\geq\beta$: Очевидно

$\beta\geq\gamma$: $\forall x\neq 0$ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|A(\frac{x}{\|x\|})\|\leq\sup\limits_{\|y\|=1}\|Ay\|=\beta\Rightarrow\gamma=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leq\beta$

$\gamma\geq\alpha$: $\forall\ 0<\|x\|\leq 1$ имеем $\|Ax\|<\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leq\sup\limits_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}=\gamma$
Если $\|x\|=0$, то $\|Ax\|=0\leq\gamma$ $\Big\}\Rightarrow\alpha\leq\gamma$

Теорема (о свойствах операторной нормы)

Пусть $A: H \to H_1$, и B - лин. оператор, действующий из H в H_1, или из H_1 в H_2 в зависимости от обсуждаемого свойства и α, β - числа. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ \|A\| \geq 0,\ \text{причём}\ \|A\|=0 \Leftrightarrow A=0 \\ 2.)\ \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \\ 3.)\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{операторная норма яви. нормой}$$

4.) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in H$

5.) $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

6.) $|\,\|A\| - \|B\|\,| \leq \|A-B\|$

Док-во: 1- $\forall x \in H$ $\|Ax\| \geq 0$ по св-ву нормы векторов в $H_1 \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| \geq 0$. Кроме того, если $A=0$, то $Ax=0$ $\forall x \in H \Rightarrow \|Ax\|=0$ $\forall x \in H \Rightarrow \|A\| = \|0\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| = 0$. И наоборот: если $\|A\|=0$, то $\sup\limits_{x \neq 0} \underbrace{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\geq 0} = 0$.

Значит $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$ $\forall x \neq 0$, т.е. $\|Ax\|=0$ $\forall x \Rightarrow Ax=0$ $\forall x \in H \Rightarrow A=0$

2- Если $\alpha=0$, то свойство очевидно. Поэтому дальше считаем, что $\alpha \neq 0$.

Фикс. $x \in H$: $\|x\| \leq 1$. Тогда $\|\alpha(Ax)\| = |\alpha| \cdot \|A(x)\| \leq |\alpha| \cdot \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

$\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|\alpha(Ax)\| \leq |\alpha| \cdot \|A\|$. И наоборот: $|\alpha| \cdot \|A\| = |\alpha| \cdot \|\frac{1}{\alpha}(\alpha A)\| \underset{\text{по уже док-ому}}{\leq} |\alpha| \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| \|\alpha A\|$

3- Фикс $x \in H$, $\|x\|<1$. Тогда $\underline{\|(A+B)x\|} = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq$

$\leq \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| + \sup\limits_{\|y\| \leq 1} \|By\| = \underline{\|A\|+\|B\|}$. Значит $\underbrace{\sup\limits_{\|x\|<1} \|(A+B)x\|}_{\|A+B\|} \leq \|A\| + \|B\|$ □

4- Если $x=0$, то св-во очевидно. Если $x \neq 0$, то $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ □

5- Фикс. $x \in H$: $\|x\|<1$. Тогда $\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \overset{4}{\leq} \|B\| \cdot \|Ax\| \overset{4}{\leq} \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \overset{\text{т.к. } \|x\|<1}{\leq}$

$\leq \|A\| \cdot \|B\|$. Значит $\|BA\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(BA)x\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ □

6- Нужно доказать два неравенства: $-\|A-B\| \overset{1.)}{\leq} \|A\| - \|B\| \overset{2.)}{\leq} \|A-B\|$

Докажем 2.): $\|A\| = \|(A-B)+B\| \overset{3}{\leq} \|A-B\| + \|B\|$ □

Докажем 1.): $\|B\| = \|(B-A)+A\| \overset{3}{\leq} \|B-A\| + \|A\| \overset{2}{=} \|A-B\| + \|A\|$ □

Упр. привести пример операторов, в которых св-во 5 - строгое неравенство

Пример (матрица и норма конечномерного оператора). Пусть H - гильбертово пр-во, $\dim(H)=n$, $x_1, \dots, x_n$ - ОНБ в H. Пусть H_1 - гильб. пр-во, $\dim(H_1)=m$, $y_1, \dots, y_m$ - ОНБ в H_1. Пусть $A: H \to H_1$ - лин. опер. Тогда $\forall x \in H$ имеем $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, где $\lambda_j = (x, x_j)$ - коэф. Фурье. При этом $|\lambda_j| = |(x, x_j)| \leq$

$\underset{\text{К-Б}}{\leq} \|x\| \cdot \underbrace{\|x_j\|}_{1} = \|x\|$. С другой стороны: $Ax = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k$. Тогда $Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{A x_j}_{\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k}$ $\Rightarrow$, причём $Ax = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k}$

$\Rightarrow$ $\forall k = 1, \dots, m$ имеем $\mu_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j$ или

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{матрица оператора } A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

[**Опр.** Опер. $A: H \to H_1$ наз-ся конечномерным, если $\dim H < +\infty$ и $\dim H_1 < +\infty$.] Значит, $\forall x \in H: \|x\| < 1$ имеем $\|Ax\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k \right\| \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \cdot \underbrace{|\lambda_j|}_{\leq \|x\| \leq 1} \cdot \underbrace{\|y_k\|}_{1} \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$

$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < +\infty \Rightarrow$ всякий конечномерный оператор имеет конечную норму, а значит он непр. и огр.

7.4 Сходимость операторов и операторные ряды

Опр. Пусть $A: H \to H_1$ - лин. опер., и $\forall n \geq 1$ $A_n: H \to H_1$ - лин. опер. Говорят, что A_n сходится к A при $n \to \infty$, если $\|A_n - A\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Обозначение $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ или $A = \lim_{n \to \infty} A_n$

Св-ва сх-ся послед. операторов:

1 - (Линейность предела). Пусть $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$, $B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} B$. Тогда $\forall \alpha, \beta$ - числа $\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$

Док-во: $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| = \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| \overset{\text{нер-во}\,\Delta}{\leq} \|\alpha(A_n - A)\| + \|\beta(B_n - B)\| =$

$\underset{\substack{\text{положит.}\\\text{одн. нормы}}}{=} |\alpha| \underbrace{\|A_n - A\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + |\beta| \underbrace{\|B_n - B\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ □

2- Если $\forall n$ $A_n: H \to H_1$ — лин. оператор и $\|A_n\| < +\infty$ и $A_n \to A$, то $\|A\| < +\infty$ и $\|A_n\| \to \|A\|$

Док-во: $\|A\| = \|(A - A_n) + A_n\| \overset{\text{нер-во } \Delta}{\leqslant} \|A - A_n\| + \|A_n\|$. Т.к. $A_n \to A$, то $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ $\exists n(\varepsilon) = n_1 : \forall n \geqslant n_1$ $\|A_n - A\| < 1$. Тогда для $n = n_1$ имеем $\|A\| \leqslant \underbrace{\|A - A_{n_1}\|}_{\wedge\, 1} + \|A_{n_1}\| < +\infty \Rightarrow \|A\| < +\infty$

$\big|\|A_n\| - \|A\|\big| \overset{\text{в из 7.3}}{\leqslant} \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, значит $\|A_n\| - \|A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. $\|A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|A\|$ □

Теорема (о полноте пр-ва операторов) (без док-ва). Если H, H_1 - гильб. пр-ва, то пр-во лин. огр. опер. $H \to H_1$ с операторной нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$, явл. полным, т.е. всякая фунд. посл. в нём сходится.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $\forall n$ задан оператор $A_n : H \to H_1$. Операторным рядом называется формальное выражение $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ (*)

Конечная сумма $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n$ называется частичной суммой ряда *.

Говорят, что ряд (*) сх-ся, если сх-ся последов. его частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_N, \ldots$. При этом <u>суммой ряда (*)</u> называют предел посл-ти его частичных сумм и обозн. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Др. словами: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} A_n$

Св-ва операторных рядов:

1.) (Линейность суммы ряда) Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n = B$, то $\forall \alpha, \beta$ - числа ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n)$ сх-ся и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n + \beta_n \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$

Док-во: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \left[\alpha \sum\limits_{n=0}^{N} A_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{N} B_n\right] =$

$\underset{\text{линейность предела}}{=} \alpha \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} A_n + \beta \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} B_n = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$.

Признак сходимости операторного ряда: если $\sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\|$ сходится, то $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ сходится и имеет место равенство $\|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\| < +\infty$

Док-во: числ. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\|$ сх-ся $\Rightarrow$ для него верно (из мат. анализа) критерий Коши: $\forall \varepsilon>0\ \exists n(\varepsilon): \forall n \ge n(\varepsilon)\ \forall p>0$ имеем $\sum_{m=n}^{n+p}\|A_m\| < \varepsilon$. Это значит, что если положим $S_N = \sum_{n=0}^{N} A_n$, то $\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{m=0}^{n+p} A_m - \sum_{m=0}^{n} A_m\| =$
$= \|\sum_{m=n+1}^{n+p} A_m\| \overset{\text{нер-во }\Delta}{\le} \sum_{m=n+1}^{n+p}\|A_m\| < \varepsilon \Rightarrow S_1, S_2, \dots, S_N, \dots$ – фунд. посл. Мы знаем, что пр-во линейных огр. операторов в гильб. пр-ве с операторной нормой явл. полным. Значит посл. $S_1, \dots, S_N, \dots$ сх-ся. Значит $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ сх-ся

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\| \overset{\text{опр}}{=} \|\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A_n\| \overset{\text{св-во 2 сход. посл. опер}}{=} \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=0}^{N} A_n\| \underset{\text{нер-во }\Delta}{\le} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\|A_n\| = \sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\| \quad \square$$

Замечание. Это св-во означает, что нер-во Δ для опер. нормы справедливо и для бесконечного числа операторов. Но нужно, чтобы ряд сходился.

7.5 Обратимость операторов. Обратный оператор

$\boxed{\text{Опр 1}}$ Говорят, что опер. $A: H \to H_1$ __обратим__, если $\forall y \in H_1$ ур. $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$

$\boxed{\text{Опр 2}}$ Гов., что опер. $A: H \to H_1$ __обратим__, если ур. $Ax = 0$ имеет только одно решение $x = 0$

$\boxed{\text{Лемм 1}}$ – определения 1 и 2 эквивалентны

Док-во: $1 \Rightarrow 2$ Очевидно, достаточно положить $y = 0$

$2 \Rightarrow 1$ Считаем, что $Ax = 0$ имеет только одно решение $x = 0$, но, рассуждая от противного, предположим опр. 1 неверно, т.е. что $\exists y \in H_1$ и $\exists x_1, x_2 \in H$, $x_1 \ne x_2$ такие, что $Ax_1 = y = Ax_2$.

Тогда для $x = x_1 - x_2$ имеем: $x \neq 0$ и $Ax = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 =$
$= y - y = 0$. Противоречие $\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Образом опер. $A: H \to H_1$ наз-ся мн-во $\{y \in H_1 \mid \exists x \in H: Ax = y\}$
Обозн. $\operatorname{Im} A$ – образ. оператора A.

$\boxed{\text{Лемма 2}}$: $\operatorname{Im} A$ явл. лин. под-вом в H_1
Док-во: Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Нужно док-ать, что $\forall \alpha, \beta$ – числа
$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} A$. $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in H: Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$.
Тогда $\forall \alpha, \beta$ – числа $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$.
Значит для $\alpha y_1 + \beta y_2$ нашёлся вектор $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$:
$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} A$ $\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $A: H \to H_1$ – обратимый лин. опер. Тогда $\forall y \in \operatorname{Im} A$
сущ. единств. вектор $x \in H$: $Ax = y$. Значит возникает
отображение (правило), сопоставляющее каждому вектору
$y \in \operatorname{Im} A$ тот самый единств. $x \in H$: $Ax = y$. Это отобр.
наз-ся обратным к A и обозн. A^{-1}
Др. словами: Если $A: H \to H_1$ – обратимый и $y \in \operatorname{Im} A$, то $Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y$

Замечание A^{-1} определён необязательно во всём H_1. Наверное,
было бы логично с самого начала считать, что и A определён
не во всём H. Мы так делать не будем: будем считать, что
A опр. во всём пр-ве H. (сопутствующее $\boxed{\text{опр.}}$ $\operatorname{dom} A$ – обл. опр. опер. A)

Св-ва обратного оператора:
1.) $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{Im} A$ (очевидно из опр.)

2.) Линейность: $A^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha A^{-1}y_1+\beta A^{-1}y_2$, $\forall y_1, y_2\in \operatorname{Im}A$, $\forall \alpha,\beta$ - числа

Док-во. A - обратимый и $y_1, y_2\in \operatorname{Im}A$, тогда $\exists x_1, x_2\in H$:

$Ax_1=y_1$, $Ax_2=y_2$. Тогда $A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2=\alpha y_1+\beta y_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha x_1+\beta x_2}_{\substack{\shortparallel \\ \alpha A^{-1}y_1+\beta A^{-1}y_2}}=A^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)$ $\square$

3.) Пусть $A: H\to H_1$ и $B: H_1\to H_2$ - два лин. обратимых оператора. Тогда BA тоже обратим и $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ *

Док-во: Сначала докажем, что BA - обратимый оператор.

$(BA)x=y \Leftrightarrow B(Ax)=y$, но я знаю, что B - обратим, т.е. $Bu=y$ имеет не более одного решения u. Но $u=Ax$, причём A обратим, а значит это ур. имеет не более одного решения x. Значит BA обратим. Теперь докажем ф-лу *: $(BA)x=y$, $Ax=u\Leftrightarrow x=A^{-1}u$

$$(BA)x=y \;\Updownarrow\; x=(BA)^{-1}y \qquad \underbrace{Bu=y\Leftrightarrow u=B^{-1}y}$$

$$\Downarrow$$

Два оператора принимают одинаковые зн. при всех допустимых y $\Rightarrow$ опер. равны * $\quad x=A^{-1}(B^{-1}y)=(A^{-1}B^{-1})y$

4.) Пусть $A: H\to H_1$ и $B: H_1\to H$ - лин. операторы; $I_H: H\to H$, $I_{H_1}: H_1\to H_1$ - тождественные операторы и пусть $BA=I_H$ и $AB=I_{H_1}$, то тогда опер. A - обратим и $A^{-1}=B$.

Док-во: Методом от противного докажем, что A обратим, т.е. допустим, что A не обратим, т.е. допустим, что $\exists y\in H_1$ и $\exists x_1, x_2\in H$, $x_1\neq x_2$: $Ax_1=y=Ax_2$. Тогда $BA=I_H$ даёт

$$\begin{array}{ccccc} B(Ax_1) & = & By & = & B(Ax_2) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ (BA)x_1 & & & & (BA)x_2 \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ x_1 & & \neq & & x_2 \end{array}$$

Противоречие

Докажем ф-лу $A^{-1}=B$. $AB=I_{H_1} \Rightarrow \forall y_1 \in H_1$ $\underset{\overset{\|}{A(By_1)}}{(AB)y_1} = I_{H_1} y_1 = y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Возникло ур-е $Av=y$, где $v=By$

Т.к. A - обратим, то $v=A^{-1}y$. Значит, возникло новое ур-е

$By=v=A^{-1}y$ (Точно так же как мы доказали обратимость A можно было док-ать, что B - обратим.) Значит операторы

B и A^{-1} одинаково действуют на любой $y \in H_1$. Значит $A^{-1}=B$ $\square$

7.Б Теорема Неймана

$\boxed{\text{Теорема Неймана}}$. Пусть H - гильб-во пр-во, $A: H \longrightarrow H$ - лин. огр. оператор : $\|A\|<1$ и $\mathrm{dom}(A)=H$. Тогда опер. $I_H - A$ обратим,

$(I_H - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^0 = I$, $A^{n+1} = A \cdot A^n$, $n \geq 0$

$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Док-во : основано на следующем вычислении: $\|A^n\| = \|A \cdot A^{n-1}\| \leq$

$\leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A\| \cdot \|A^{n-2}\| = \|A\|^2 \cdot \|A^{n-2}\| \leq \ldots \leq \|A\|^n \cdot \underset{\overset{\|}{\|I_H\|=1}}{\|A^0\|} = \|A\|^n$

Следовательно: а) $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. $\|A^n\| \leq \|A\|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. $\|A\|<1$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сх-ся в силу мажорантного признака сх-ти :

т.е. из сх-ти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < +\infty$ следует $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сх-ся

$\leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$, т.к. $\|A\|<1$

Далее : $\forall N \geq 0$

$$(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} \underbrace{A \cdot A^n}_{A^{n+1}} = I - A^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} I \Rightarrow (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I$$

Аналогично, $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} A^n\right)(I-A) = I - A^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} I \Rightarrow \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right)(I-A) = I$

Значит по св-ву 4 из п.7.Г $\Rightarrow$ $I-A$ обратим, и $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$

При этом $\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$

т.к. $\|A\|<1$

Значит $(I-A)^{-1}$ ограничен. Кроме того, $\operatorname{dom}(I-A)^{-1} = \operatorname{dom}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right) =$
$= \operatorname{dom} A = H$. $\square$

<u>Замечание</u>. Т. Неймана показывает, что в ф-лу для суммы геометр. прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = (1-q)^{-1}$, $|q|<1$, можно подставлять $q \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{C}$ и $q = A$ — оператор

7.7 Спектр. оператора

Пусть H - гильб-во пр-во над $\mathbb{C}$, $A: H \longrightarrow H$ - лин. огр. оператор. Фикс. $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассм. ур. $Ax - \lambda x = y$ или $(A - \lambda I)x = y$ или $x = (A-\lambda I)^{-1}$ при . Возможны след. 4 случая:

1.) $\nexists\ (A-\lambda I)^{-1}$.
2.) $\exists\ (A-\lambda I)^{-1}$, причём $\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} = H$
3.) —— // —— $\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} \neq H$, но $cl[\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1}] = H$
4.) —— // ——, причём $cl[\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1}] \neq H$

(1) В этом случае $\exists x \neq 0: (A-\lambda I)x = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x$, тогда λ - <u>собств. знач. опер. A</u>, x - <u>собств. вектор опер. A</u> отвечающий собств. знач. λ. Совокупность всех собств. значений λ опер. A называется точечным спектром и обозн σ_p.

(2) В этом случае λ наз-ся <u>регулярным значением</u> опер. A. Совокупность всех регулярных значений назыв. резольвентным мн-вом опер. A и обозн. $\rho(A)$. При этом опер. $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ наз-ся резольвентным оператором, причём $\operatorname{dom} R_\lambda = H$.
Кроме того, R_λ - огр. опер. Это следует из след. т. Банаха: если H - гильб. пр-во, $B: H \longrightarrow H_1$ - лин. огр. обратимый опер. $\operatorname{dom} B = H$, причём $\operatorname{dom} B^{-1} = H_1$. Тогда B^{-1} ограничен (~~без~~ док-ва)

$\boxed{\text{Опр.}}$ Мн-во $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется <u>спектром</u> опер. A

(3) В этом случае говорят, что λ лежит <u>непрер. спектре</u> опер. A и пишут $\lambda \in \sigma_c(A)$

(4) В этом случае говорят, что λ лежит в <u>остаточном</u> спектре опер. A и пишут $\lambda \in \sigma_r(A)$

Св-ва спектра:

1.) $\sigma(A) = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$, $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_p \cap \sigma_r = \sigma_c \cap \sigma_r = \varnothing$

2.) Спектр опер. A содержится в замкнутом рад. $\|A\|$ с центром в 0, т.е. $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$

3.) Спектр есть замкнутое мн-во, т.е. $cl\,\sigma(A) = \sigma(A)$

Док-во: (1) очевидно

(2) Оно эквив. тому, что $\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|$ имеем $\lambda \in \rho(A)$, т.е., что для такого λ опер. $A - \lambda I$ обратим и $\operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} = H$

$$(A - \lambda I)^{-1} = \left[-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right]^{-1} = \Big[\underbrace{(-\lambda I)}_{\text{обратим}}\underbrace{\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)}_{\text{по т. Неймана обратим}}\Big]^{-1} =$$

$$(-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}I \quad \left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$$

$$= \left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}(-\lambda I)^{-1}, \text{ причём } \operatorname{dom}(A-\lambda I)^{-1} = H \Rightarrow \lambda \in \rho(A) \ \square$$

(3) Без док-ва., но доказывается как 2-ое св-во.

(7.8) Линейные функционалы

$\boxed{\text{Опр.}}$ Лин. ф-лом называется лин. оператор, действующий из H в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

<u>Пример</u>: $\forall x_0 \in H$ ф-ла $f(x) = \underbrace{(x, x_0)}_{\text{скал. произв. в } H}$ задаёт лин. ф-л

<u>Замечание</u>. Поскольку лин. ф-л. является лин. опер., то мы уже знаем про лин. ф-лы: норма, ограниченность, непрерывность,

Но есть и понятия, специальные для ф-алов:

$\boxed{\text{Опр}}$ Мн-во $\{x \in H \mid f(x)=0\}$ называется ядром ф-ла f и обозн. $\ker f$

Св-ва лин. ф-лов (здесь $f: H \to \mathbb{C}$ – лин. ф-л.)

1.) – $\ker f$ явл. лин. подпр-ом в H,

2.) – если f непр., то $\ker f$ замкнуто,

3.) – если f – ненулевой непр. ф-ал, то $\dim(\ker f)^{\perp}=1$

4.) – $\forall x_0 \in H$ ф-ла $f(x)=(x,x_0)$ задаёт лин. непр. ф-л на H, причём $\|f\|=\|x_0\|$

5.) – $\forall$ лин. непр. ф-ла $f: H \to \mathbb{C}$ $\exists! \, x_0 \in H : \forall x \in H$ имеем $f(x)=(x,x_0)$, при этом $\|f\|=\|x_0\|$

<u>Замечание.</u> Св-ва 4+5 называют т. Рисса об общем виде лин. непр. ф-ла

Докажем некоторые из этих св-в:

① Пусть $x, y \in \ker f$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $f(\alpha x+\beta y)=\alpha \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x)}}+\beta \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(y)}}=0$, тогда $\alpha x+\beta y \in \ker f$. Значит $\ker f$ явл. под-ом в H.

② Нужно доказать, что $\ker f$ содержит все свои предельные точки. Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots \in \ker f$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in H$. Нужно убедиться, что $x_0 \in \ker f$: $|f(x_0)|=|f(x_0-x_n+x_n)|=$

$$= |f(x_0-x_n)+\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x_n)}}| \leqslant \overset{<+\infty}{\|f\|}\, \underbrace{\|x_0-x_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_0)=0 \Rightarrow x_0 \in \ker f \quad \square$$

④ $$\|f\|=\sup_{\|x\|<1}|f(x)|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(x,x_0)| \overset{\text{К-Б.}}{\leqslant} \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|x\|\cdot\|x_0\|=\|x_0\|<+\infty,$$ значит f – непр.

Далее рассмотрим два случая

Если $x_0=0$, то $0=\|x_0\| \geqslant \|f\| \geqslant 0 \Rightarrow \|f\|=0=\|x_0\|$

Если $x_0 \neq 0$, то $\|x_0\| \geqslant \|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)| \geqslant f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)=\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0\right)=\|x_0\| \Rightarrow$

Опр. Мн-во всех лин. непр. ф-лов на гильб-ве пр-ве H называется **сопряжённым** к H пр-вом и обозн. H^*.

7.9 Бра- и Кет-векторы

Бра- и кет-векторы

Здесь $x, y \in H$ и (x,y)-
- ск. произв, лин. по 1-ому арг.

$$(x,y) = \langle y|x\rangle = \{\langle y|\}\{|x\rangle\}$$

Это то же самое ск. произв., но лин. по 2-ому арг.

Разделим ск. произв. на два отдельных символа
$|x\rangle$ отождествляют с вектором $x \in H$ — кет-вектор
$\langle y|$ отождеств с вектором $y \in H^*$ — бра-вектор

Замечание. Название бра- и кет-векторов происходит от bracket -скобка

Пример 1. (Разложение тождеств. оператора или правило сокращения)

Пусть H — гильб-во пр-во, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ — ортонорм базис в H

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k| = I$.

Вычисления будем вести в „обычных обозн" и в бра-, кет- обозн.

$x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\alpha_k = (x, x_k)$ — коэф. Фурье $\quad |x\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k\rangle \alpha_k$, где $\alpha_k \langle x_k|x\rangle$

$$|x\rangle = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|}_{= I}\,|x\rangle \quad \square$$

Пример 2. (вычисление резольвентного оператора)

Пусть H — гильб-во пр-во, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ — собств. в. оператора $A: H \to H$, т.е. ($\forall k = 1, \dots, n \quad Ax_k = \lambda_k x_k$, где λ_k — собств. знач. опер. A) и пусть $x_1, \dots, x_n$ образуют ортонорм. базис в H. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\lambda_k - \lambda}$$

Чтобы найти резольвентный оператор, нужно $\forall y \in H$ найти $x \in H: (A-\lambda I)x = y$, т.е. чтобы $x = (A-\lambda I)^{-1} y$. Вычисляем в „обычных" обозн. и в бра- и кет- обозн.

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \text{ где } \alpha_k = (x, x_k) \qquad |x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle \alpha_k,\ \alpha_k = \langle x_k | x\rangle$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k, \text{ где } \beta_k = (y, x_k) \qquad |y\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle \beta_k,\ \beta_k = \langle x_k | y\rangle$$

$$A x_k = \lambda_k x_k \qquad |x_k\rangle A = |x_k\rangle \lambda_k$$

$$Ax - \lambda x = y$$

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

$\boxed{\text{Упр.}}$ переписать в бра- и кет- обозн.

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underset{\lambda_k x_k}{\underset{\parallel}{A x_k}} - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

Т.к. $x_1, \dots, x_n$ — образовывает базис, то разложение по нему единств. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ коэф. перед x_k слева и справа равны

$$\alpha_k \lambda_k - \lambda \alpha_k = \beta_k$$

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda}$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(y, x_k)}{\lambda_k - \lambda} x_k \qquad |x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle \frac{\langle x_k | y\rangle}{\lambda_k - \lambda}$$

$$\parallel$$

$$(A-\lambda I)^{-1} \;\square$$

(7.10) Оператор, сопряжённый к ограниченному

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть H и H_1 — гильб. пр-ва. $A: H \to H_1$ — лин. огр. операторы. Фикс. $y \in H_1$ и построим лин. ф-л $f: H \to \mathbb{C}$ по ф-ле $f(x) = (Ax, y)$ $\forall x \in H$. Тогда f — явл. лин. непр. ф-л, т.к. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| =$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, y)| \overset{\text{К-Б}}{\leqslant} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \cdot \|y\| \underset{\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|}{\leqslant} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| \|A\| \|y\| = \|A\| \|y\| < +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ф-л. непр.

По т. Рисса $\exists!\, x_0 \in H: f(x) = (x, x_0)\ \forall x \in H$. Тем самым у нас возникло правило (отображ.), которое каждому $y \in H_1$ сопоставляет

$x_0 \in H$ такой, что $(Ax, y) = f(x) = (x, x_0)\ \forall x \in H$. Это отобр. называют оператором, <u>сопряж. к A</u> и обозн. A^*, т.е. пишут $x_0 = A^* y$, $A^*: H_1 \to H$, т.е. A^* „действует навстречу" оператору $A: H \to H_1$.

Другими словами: сопр. опер. $A^*: H_1 \to H$ задаётся равенством
$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H_1$$

<u>Св-ва</u> сопр. опер.:

(Здесь H, H_1, H_2 — гильб. пр-ва, $A: H \to H_1$, $B: H \to H_1$, $C: H_1 \to H_2$ — огр. лин. опер.)

1.) A^* — лин. огр. опер, причём $\|A^*\| \leq \|A\|$

2.) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ $\forall \alpha, \beta$ — числа

3.) $(A^*)^* = A$

4.) $\|A^*\| = \|A\|$

5.) $I^* = I$

6.) $(CA)^* = A^* C^*$

Док-во этих свойств удобно проводить с помощью следующей мини-леммы: если $x, y \in H$ таковы, что $(x, z) = (y, z)\ \forall z \in H$, то $x = y$

Док-во леммы: $(x,z) = (y,z) \Leftrightarrow (x,z) - (y,z) = 0 \Leftrightarrow (x-y, z) = 0\ \forall z$

Подставим $z = x - y$: $\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\square$

Лемма даёт бескоординатный способ проверки равенства двух векторов.

Лемму можно переформулировать: $(z, x) = (z, y)\ \forall z \in H \Rightarrow x = y$

Докажем св-во 1: Пусть x — произв. вектор H. Фикс $y_1, y_2 \in H_1$.

Тогда $\forall \alpha, \beta$ — числа: $(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) \overset{\text{опр}}{=} (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) \Leftrightarrow$

$\ominus\ \bar{\alpha}(Ax, y_1) + \bar{\beta}(Ax, y_2) \overset{\text{опр.}}{=} \bar{\alpha}(x, A^*y_1) + \bar{\beta}(x, A^*y_2) =$

$= (x, \underbrace{\alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2}) \ \forall x \in H \Rightarrow$ по мини-лемме $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) =$

$= \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2 \Rightarrow A^*$ — лин. опер.

Теперь оценим $\|A^*\|$: $\cancel{|(x, A^*y)| \overset{\text{к-б}}{\leqslant} \|x\|}$ $|(x, A^*y)| \overset{\text{опр}}{=} |(Ax, y)| \overset{\text{к-б.}}{\leqslant}$

$\leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H, \forall y \in H.$

Подставим $x = A^*y$: $\|A^*y\|^2 = (A^*y, A^*y) \leqslant \|A\| \cdot \cancel{\|A^*y\|} \cdot \|y\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A^*\| = \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} \|A^*y\| \leqslant \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} \|y\| \|A\| = \|A\| < +\infty$ □

Теорема (о применении сопряжённого оператора для нахождения остаточного спектра оператора).

Пусть H — гильб. пр-во, $A: H \to H$ — лин. огр. опер. и $\lambda \notin \sigma_p(A)$

Тогда след. 2 условия эквивалентны:

1.) $\lambda \in \sigma_r(A)$ и 2.) $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$

Без док-ва

(7.11) Самосопряжённые и компактные операторы

Опр.: Говорят, что лин. опер. $A: H \to H$ явл. самосопр., если $A^* = A$, т.е. если $\forall x, y \in H$ выполнено $(Ax, y) = (x, Ay)$

Теорема (о точечном спектре самосопр. оператора)

Любое собств. значение самосопр. оператора явл. веществ., а собств. вектора, отвечающие различным собств. знач. взаимно ортогональны.

Док-во: Пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Тогда $\lambda \|x\|^2 = (\lambda) \cdot (x, x) =$

$= (\lambda x, x) = (Ax, x) \overset{\text{опр}}{=} (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ и $Ay = \mu y$, $y \neq 0$ причём $\lambda \neq \mu$

$Ax=\lambda x$ умножим скалярно на y справа

$Ay=\mu x$ —— // —— на x слева

$(Ax,y)=(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

$(x,Ay)=(x,\mu y)\overset{\bar\mu=\mu}{=}\mu(x,y)$

$(Ax,y)-(x,Ay)=(Ax,y)-(Ax,y)=0=\underset{\ne 0}{(\lambda-\mu)}(x,y)\Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)=0 \Leftrightarrow x\perp y$ □

$\boxed{\text{Опр.}}$ Опер. $A: H\longrightarrow H_1$ наз-ся <u>компактным</u>, если $\exists A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ операторов из $H\longrightarrow H_1$ таких, что ① $\forall n$ A_n – огр. опер.;

② $\forall n$ $\dim(\operatorname{Im} A_n)<+\infty$, т.е. A_n – опер. с конечномерным образом,

③ $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$

<u>Замечание</u>. Всякий конечномерный опер. компактен. В самом деле, можно взять $\forall n$ $A_n=A$

Теорема (Гильберта – Шмидта о базисе из собств. функций (векторов) комп. самосопр. оператора)

Пусть H – гильб. пр-во, $\dim H\ne 0$, $A: H\longrightarrow H$ – комп. самосопр. Тогда в H сущ. ортонорм. базис $x_1,\ldots,x_n,\ldots$, состоящий из собств. векторов опер. A, т.е. такой, что $Ax_n=\lambda_n x_n$ $\forall n$, где λ_n – собств. знач. опер. A (без док-ва)

§8. Интегральные уравнения

(8.1) Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

Интегральный оператор Гильберта – Шмидта

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $K:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ и $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ – заданные функции. Тогда след. уравнения относительно искомой ф-ии