$Ax=\lambda x$ умножим скалярно на y справа

$Ay=\mu x$ —11— на x слева

$(Ax,y)=(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

$(x,Ay)=(x,\mu y)\overset{\bar{\mu}=\mu}{=}\mu(x,y)$

$(Ax,y)-(x,Ay)=(Ax,y)-(Ax,y)=0=\underset{\neq 0}{(\lambda-\mu)}(x,y)\Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)=0 \Leftrightarrow x\perp y$ □

$\boxed{\text{Опр.}}$ Опер. $A: H\longrightarrow H_1$ наз-ся <u>компактным</u>, если $\exists A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$ операторов из $H\longrightarrow H_1$ таких, что ① $\forall n$ A_n – огр. опер.;

② $\forall n$ $\dim(\operatorname{Im} A_n)<+\infty$, т.е. A_n – опер. с конечномерным образом,

③ $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$

<u>Замечание</u>. Всякий конечномерный опер. компактен. В самом деле, можно взять $\forall n$ $A_n=A$

Теорема (Гильберта – Шмидта о базисе из собств. ~~функций~~ векторов комп. самосопр. оператора)

Пусть H – гильб. пр-во, $\dim H\neq 0$, $A: H\longrightarrow H$ – комп. самосопр. Тогда в H сущ. ортонорм. базис $x_1,\dots,x_n,\dots$, состоящий из собств. векторов опер. A, т.е. такой, что $Ax_n=\lambda_n x_n$ $\forall n$, где λ_n – собств. знач. опер. A (без док-ва)

§8. Интегральные уравнения

8.1 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

Интегральный оператор Гильберта – Шмидта

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $K: [a,b]\times[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ и $f: [a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ – заданные функции. Тогда след. уравнения относительно искомой ф-ции

$$\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$$ – инт. уравн. Фредгольма 1-ого рода

$$\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$ – // – 2-ого рода

$$\int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0$$ – интегр. уравн. Вольтерра 1-ого рода

$$\int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$ – // – II-ого рода

При этом K называется <u>ядром</u> соответствующего интегр. уравн.

<u>Замечание</u>. Ур. Вольтерра явл. частным случаем ур. Фредгольма, т.к.

$$\int_a^t k(t,s)\,x\,ds = \int_a^b \widetilde{K}(t,s)\,x\,ds,$$ где $x = x(s)$ и

$$\widetilde{K}(t,s) = \begin{cases} k(t,s), & a \leq s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $K : [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$, т.е. пусть $\|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \overset{\text{опр.}}{=} \left\{ \int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2\,dt\,ds \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$

Тогда интеграл $(Ax)(t) = \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds$ задаёт оператор Гильберта – Шмидта.

<u>Замечание</u>. ур. Фредг. II-ого рода можно записать в виде $x = Ax + f$, где A – опер. Г-Ш.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Оператор Г-Ш линеен, ограничен и компактен, в частности $\|A\| = \|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} < +\infty$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$. Если A – опер. Г-Ш, то A^* тоже явл. опер. Г-Ш, и его ядро $K^*(t,s)$ может быть найдено по формуле $K^*(t,s) = \overline{k(s,t)}$, где $K(t,s)$ – ядро опер. A.

Замечание. A-самосопр. $\iff K(t,s)=\overline{K(s,t)} \xrightarrow{\text{опр}}$ симметричное ядро

(8.2) Уравнения с вырожденным ядром

Опр. Ядро $K(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{N} P_k(t)Q_k(s)$ называется вырожденным. Здесь считается, что $P_1,\dots,P_N$ и $Q_1,\dots,Q_N$ состоит из лин. незав. функций.

Решение ур. Фред. II-го рода с вырожденным ядром сводится к решению некоторой системы алг. уравнений. В самом деле.

$$x(t)=\int_a^b \sum_{k=1}^{N}\big(P_k(t)\,Q_k(s)\big)x(s)\,ds+f(t)$$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}P_k(t)\underbrace{\int_a^b Q_k(s)\,x(s)\,ds}_{q_k=\mathrm{const}}+f(t)\Rightarrow x(t)=\sum_{k=1}^{N}q_k P_k(t)+f(t)$$

Подставим $x(t)$ в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{N}q_kP_k(t)+\cancel{f(t)}=\sum_{k=1}^{N}P_k(t)\int_a^b Q_k(s)\Big[\sum_{j=1}^{N}q_jP_j(s)+f(s)\Big]ds+\cancel{f(t)}$$

Т.к. $P_1,\dots,P_N$ – лин. нез., то можем приравнять коэфф. при P_k слева и справа. $q_k=\sum\limits_{j=1}^{N}q_j\underbrace{\int_a^b Q_k(s)P_j(s)\,ds}_{a_{kj}}+\underbrace{\int_a^b Q_k(s)f(s)\,ds}_{b_k}$

Получим систему

$$q_k=\sum_{j=1}^{N}a_{kj}q_j+b_k\quad\forall k=1,\dots,N$$

(8.3) Уравнения с малым параметром

Ряд Неймана. Метод последов. приближений

$x(t)=\mu\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds+f(t)$ — ур. с параметром μ, ур. Фред. II-р.

$x-\mu \underset{\text{опер. Г-Ш}}{A}x=f$, $(I-\mu A)x=f \overset{?}{\Longrightarrow} x=(I-\mu A)^{-1}f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu^nA^nf \ominus$

т. Неймана: если $\|\mu A\|<1$, то $(I-\mu A)$ обр. и ряд Неймана

$\ominus \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x_n$, где $x_0=f$, $x_{n+1}=\mu A x_n$

... последов. приближений — он работает если $\|\mu A\|<1$.

8.4 Интегральные ур. с симметричным ядром.

Разложение решений по собств. ф-ям ядра.

ур. Фредгольма II-ого рода, т.е. $x = \mu A x + f$, где A — опер Г-Ш

Однородн. ур-ие Ф. II рода: $x = \mu A x$, $x \neq 0$; μ — характеристическое число ядра K или хар. число инт. ур.; x — собств. ф-ия ядра K или собств. ф. интегр. ур.	$Ax = \lambda x$, $x = 0$; λ — собств. зн. опер. A; x — собств. в. опер. A
$\mu = \frac{1}{\lambda}$	
K — симметр. ядро $\Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$	A — самосопр. $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
Теорема Если K — симметр. ядро из $L_2([a,b]\times[a,b])$, то	**Теорема Г-Ш**: Если A — компакт. самосопр., то в H сущ. ортонорм. гильбертов базис, сост. из собств. векторов опер. A

в $\mathrm{Im}\, A$ сущ. ортонорм. базис из собств. ф. ядра K, т.е.

$x_1, \ldots, x_n, \ldots$ такие, что $x_n = \mu_n A x_n$

$$\underbrace{x - f}_{\mathrm{Im}A} = \mu A x \overset{\text{теорема}}{=} \sum_n a_n x_n \Rightarrow x = f + \sum a_n x_n$$

a_n — неопр. коэфф.

$$f + \sum a_n x_n - f = \mu A\left(f + \sum_n a_n x_n\right) = \mu A f + \sum \frac{\mu}{\mu_n} a_n \underbrace{\mu_n A x_n}_{x_n}$$

$$Af = \sum b_n x_n,$$

где $b_n = (Af, x_n) =$

$$= \left(f, \frac{\mu_n}{\mu_n} A x_n\right) = \frac{1}{\mu_n}(f, x_n)$$

Приравняем коэфф. при x_n

$$a_n = \mu \frac{1}{\mu_n}(f, x_n) + \frac{\mu}{\mu_n} a_n \Big| \mu_n$$

$$(\mu_n - \mu) a_n = \mu (f, x_n) \Rightarrow a_n = \frac{\mu (f, x_n)}{\mu_n - \mu}$$

$$x = f + \sum_n \frac{\mu(f, x_n)}{\mu_n - \mu} x_n$$ — разложение по собств. функциям ядра