НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

РЯДЫ ФУРЬЕ

1996

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

В. А. Александров

РЯДЫ ФУРЬЕ

Методическое пособие

Новосибирск
1996

Излагается одна из пятнадцати тем, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета для студентов второго года обучения в рамках обязательного курса "Основы функционального анализа и теории функций". Теоретический материал дополняют задачи, подобранные с учётом особенностей данного курса и рекомендуемые для решения на практических занятиях.

Предназначается для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Электронный вариант данного пособия доступен в системе World Wide Web на сервере Новосибирского государственного университета (http://www.nsu.ru).

Подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX, разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX, the American Mathematical Society's TEX macro system.

Подписано в печать 17 октября 1996 г. Формат 60×84, 1/16
Офсетная печать Уч.-изд. л. 3,5
Тираж 300 экз. Заказ № 417 Цена 3000 р.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета; участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

Предисловие

Курс "Основы функционального анализа и теории функций", читаемый на физическом факультете Новосибирского государственного университета для студентов второго года обучения, начинается с темы "Ряды Фурье". Настоящее пособие представляет собой переработанный конспект лекций по этой теме, снабжённый задачами, рекомендуемыми для проведения практических занятий.

Необходимость написания такого пособия продиктована тем, что на русском языке отсутствует литература, посвящённая рядам Фурье и ориентированная на студентов-физиков. Стандартные учебники написаны для математических факультетов, где на изучение этой темы отведено не 4 лекции, как на физфаке НГУ, а гораздо больше. В результате студентам-физикам приходилось отслеживать разные сюжеты этой темы, излагаемые на "живых" лекциях, по разным учебникам. Такая практика вела к перегрузке в работе студентов и смещению центра тяжести их усилий с физических дисциплин на математические, что представляется неуместным.

Настоящее пособие содержит ту (в общем-то небольшую) минимально необходимую для освоения базовых физических дисциплин цепочку логически связанных между собой фактов, которые реально излагаются на лекциях и тем самым спрашиваются на экзамене.

При написании пособия автор использовал в основном следующие стабильные учебники, которые и рекомендует для более глубокого ознакомления с предметом:

1. Зорич В. А. Математический анализ. Т.1. М. : Наука, 1981.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 6-е, испр. М. : Наука, 1989.

3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математичекому анализу: Интегралы. Ряды. М. : Наука, 1986.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Изд. 5-е. М. : Наука, 1969.

Автор выражает признательность Е. П. Волокитину, подготовившему рис. 3, 4 с использованием пакета Mathematica.

§ 1. Понятие ряда Фурье 2π-периодической функции и задача о разложении периодической функции в ряд Фурье

В курсе математического анализа вы познакомились с понятием функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ и работали с его важным частным случаем — степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. В этой главе мы рассмотрим другой очень важный (в том числе и для физических приложений) частный случай функциональных рядов — тригонометрический ряд, который будем записывать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

где a_n и b_n — вещественные числа.

Начнём с вопроса о том, можно ли данную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представить в виде тригонометрического ряда, т.е. можно ли найти коэффициенты a_n и b_n такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2}$$

Сумма ряда, стоящего справа в формуле (2), есть, очевидно, 2π -периодическая функция. Значит, разлагать в тригонометрический ряд можно только 2π-периодические функции f. Кроме того, ясно, что если две периодические функции совпадают на промежутке, длина которого равна периоду, то они совпадают всюду. Поэтому равенство (2) нам достаточно проверить на некотором промежутке длины 2π, например, $[-\pi, \pi]$.

Чтобы продвинуться далее, обратимся к следующим наводящим соображениям. [Наводящие соображения отличаются от доказательства тем, что при их выполнении не следят за соблюдением формальных условий законности совершаемых действий.] Предположим, что равенство (2) имеет место для всех $x \in [-\pi, \pi]$, а функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ и коэффициенты a_n, b_n таковы, что все совершаемые действия законны. Найдём формулы для вычисления a_n, b_n.

Чтобы найти a_0, проинтегрируем равенство (2) почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,d.\right].$$

Однако для $n > 0$ справедливы равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (3)$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями,и мы получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Для того чтобы найти a_m при $m > 0$, умножим обе части равенства (2) на $\cos mx$ и проинтегрируем почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx\right].$$

Первый член справа исчезнет ввиду (3), а в соответствии с известными формулами тригонометрии мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos 2mx]\,dx = \pi, & \text{если} \quad n = m. \end{cases}$$

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме того, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m. Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Аналогично, умножая разложение (2) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, получим формулу для коэффициента при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Формулы (4) – (6) часто называют *формулами Эйлера — Фурье*; вычисленные по этим формулам коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* функции f, а составленный с их помощью ряд (1) — *рядом Фурье* функции f.

Обратим внимание, что постоянная $a_0/2$ в (1) пишется в таком виде, чтобы придать единообразие формулам (4) и (5).

Вышеприведённые наводящие соображения показывают, что поиски тригонометрического разложения данной функции целесообразно начать с изучения её ряда Фурье, откладывая на потом строгое изучение вопроса о том, для каких функций этот ряд сходится и притом — именно к данной функции. Пока же это не сделано, функции f сопоставляют её *формальный ряд Фурье* (что обычно записывают в виде)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

про который известно, что его коэффициенты вычислены по функции f по формулам Эйлера — Фурье (4) – (6), но ничего не утверждается о его сходимости и тем более — о его сходимости к данной функции.

Задачи

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, предполагая, что они имеют период 2π:

1. $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < -\pi/2, \\ 0, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1, & \text{если } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

3. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$. 4. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$.

5. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$. 6. $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$.

7. $$f(x) = \begin{cases} \pi/2 + x, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ \pi/2 - x, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ -1, & \text{если } \pi/2 < x < 3\pi/2. \end{cases}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

§ 2. Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Предположим, что функция f задана в промежутке $[-l, l]$, где l — некоторое положительное число. Сделав подстановку

$$x = \frac{ly}{\pi}, \qquad (-\pi \le y \le \pi),$$

получим функцию $g(y) = f(ly/\pi)$, определённую в промежутке $[-\pi, \pi]$. В соответствии с предыдущим параграфом функции g соответствует (формальный) ряд Фурье

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера — Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \cos ny \, dy, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \sin ny \, dy, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Возвращаясь к старой переменной, т.е. полагая в выписанных формулах $y = \pi x/l$, мы получим для функции f тригонометрический ряд несколько изменённого вида:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ввиду простоты изложенного перехода в последующем изложении мы не будем возвращаться к случаю функций, заданных на интервале $[-l, l]$.

Задачи

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, считая, что они периодичны с периодом $2l$:

10. $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } 1 < x < 3; \end{cases} \qquad 2l = 4.$$

11. $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{если } 2 \le x < 3; \end{cases} \qquad 2l = 3.$$

12. $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \le \omega x \le 0, \\ \sin \omega x, & \text{если } 0 \le \omega x \le \pi; \end{cases} \qquad 2l = 2\pi/\omega.$$

§ 3. Разложения только по синусам или только по косинусам

Начнём со следующего простого замечания: если заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$ интегрируемая функция f нечётна, т.е. для всех $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx =$$

[мы совершаем в интеграле, вычисляемом по промежутку $[-\pi, 0]$, замену переменной $y = -x$ и пользуемся нечётностью f]

$$= \int_{\pi}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Аналогично заметим, что для чётной функции f справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Пусть теперь f является интегрируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$ чётной функцией. Тогда произведение $f(x)\sin nx$ будет нечётной функцией и, по сказанному выше,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, ряд Фурье чётной функции содержит только косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причём коэффициенты a_n могут быть найдены по формуле

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

поскольку функция $f(x) \cos nx$ в рассматриваемом случае является чётной.

Аналогично ряд Фурье нечётной функции содержит одни лишь синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

а его коэффициенты могут быть записаны в виде

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Предположим далее, что функция f задана лишь в промежутке $[0, \pi]$. Желая разложить её в этом промежутке в ряд Фурье, мы сначала продолжим f в промежуток $[-\pi, \pi]$ произвольным образом, а затем воспользуемся формулами Эйлера — Фурье. Произвол в продолжении функции приводит к тому, что для одной и той же функции $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ мы можем получать различные ряды Фурье. Но можно использовать этот произвол так, чтобы получить разложение только по синусам или только по косинусам: в первом случае достаточно продолжить f нечётным образом, а во втором — чётным.

Задачи

13. Разложить функцию $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$ в ряд Фурье по синусам.

14. Разложить функцию $f(x) = \sin ax$, $0 \leq x \leq \pi$ в ряд Фурье по косинусам.

15. Разложить функцию $f(x) = e^{ax}$, $0 < x < \pi$: а) в ряд Фурье по косинусам; б) в ряд Фурье по синусам.

16. Разложить функцию $f(x) = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$ в ряд Фурье по синусам.

17. Доказать, что если интегрируемая на промежутке $[-\pi, \pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(x+\pi) = f(x)$, то $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ для всех $n \ge 1$.

18. Доказать, что если интегрируемая на промежутке $[-\pi, \pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(x+\pi) = -f(x)$, то $a_0 = 0$ и $a_{2n} = b_{2n} = 0$ для всех $n \ge 1$.

19. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0, \pi/2]$ функцию на промежуток $[-\pi, \pi]$, чтобы её ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad ?$$

20. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0, \pi/2]$ функцию на промежуток $[-\pi, \pi]$, чтобы её ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad ?$$

21. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье функции $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, если её график:

а) имеет центр симметрии в точках $(0, 0)$ и $(\pm\pi/2, 0)$;

б) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$?

§ 4. Лемма Римана — Лебега

Лемма (Римана — Лебега). *Если функция f интегрируема на промежутке $[a, b]$, то*

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin px\,dx = 0.$$

Доказательство. Если функция f непрерывно дифференцируема в промежутке $[a, b]$, то интегрируя по частям, непосредственно получаем, что при $p \to \infty$

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right| = \left|-\frac{1}{p}\int_a^b f(x)\,d(\cos px)\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{p}\left[f(x)\cos px\,\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cos px\,dx\right]\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left[|f(b)\cos bp| + |f(a)\cos ap| + \int_a^b |f'(x)\cos px|\,dx\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)|\,dx\right] \to 0.$$

В общем случае доказательство леммы Римана — Лебега опирается на следующее утверждение: *если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая непрерывно дифференцируемая функция $f_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$, что*

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{7}$$

Строгое доказательство этого утверждения потребовало бы от нас вернуться к теории интегрирования, что представляется сейчас неуместным. Поэтому мы примем его без доказательства, ограничившись пояснением на рисунках. На рис. 1 сплошной линией изображён график функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, а пунктирной — график искомой функции f_ε, там, где он не совпадает с графиком функции f. При этом значение интеграла

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx$$

равняется площади заштрихованной области и не вызывает сомнения, что оно действительно может быть сделано меньше любого наперёд заданного значения. Рис. 2 иллюстрирует обсуждаемое утверждение для функции $f(x) = |x|$.

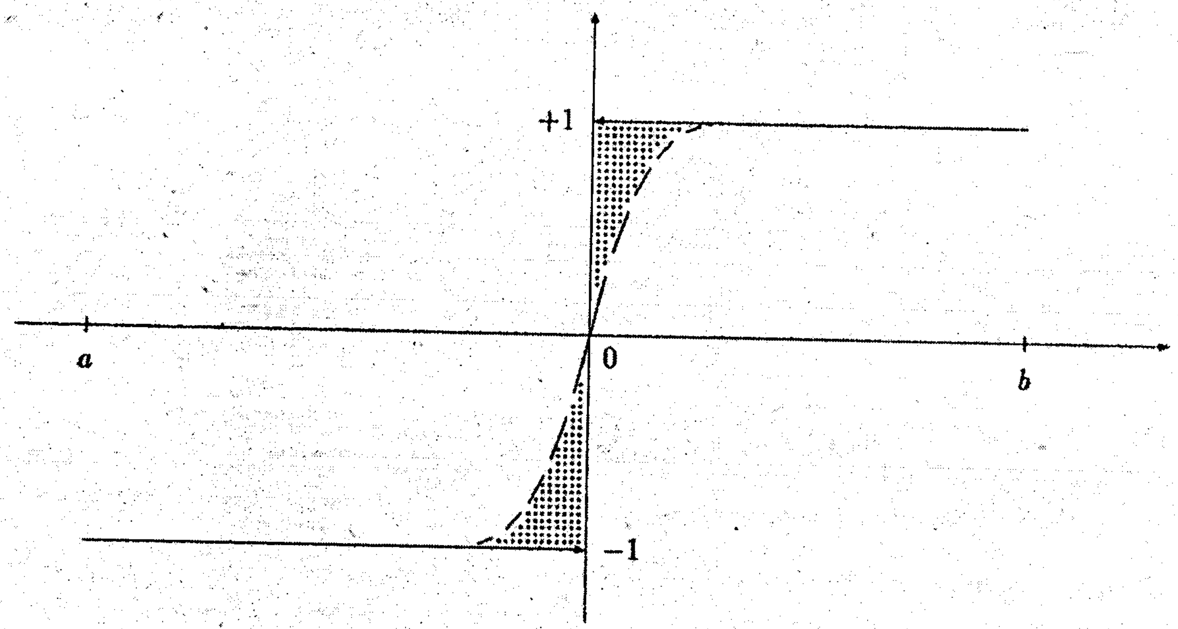

Рис. 1

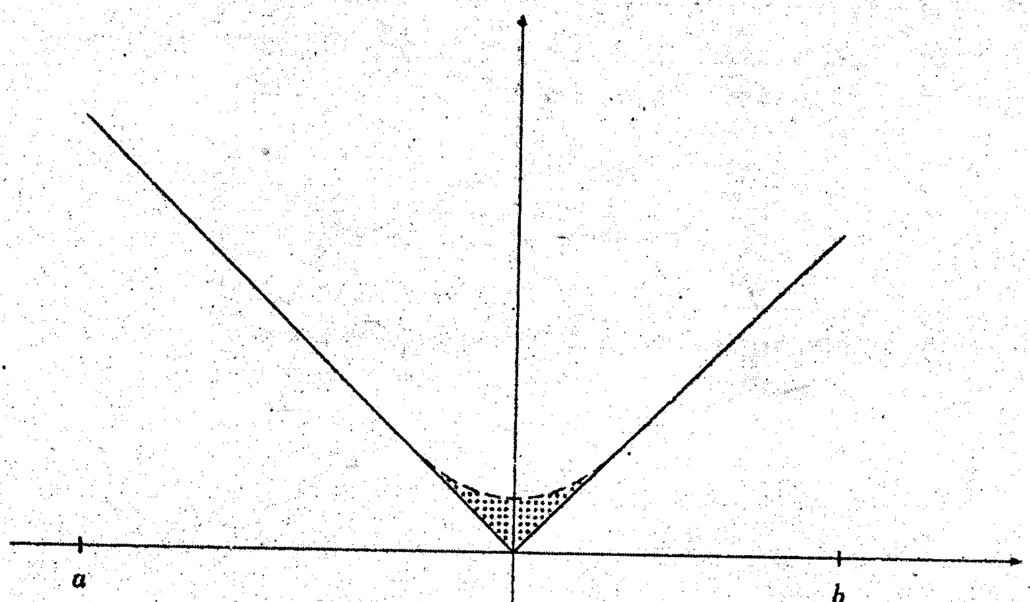

Рис. 2

Используем сформулированное выше утверждение для завершения доказательства леммы Римана — Лебега:

$$\left| \int_a^b f(x) \sin px\, dx \right| \le$$

$$\le \left| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \sin px\, dx \right| + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \sin px\, dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \sin px\, dx \right|.$$

Первое слагаемое в правой части меньше ε в силу (7), а второе стремится к нулю при $p \to \infty$ (и, следовательно, также может быть сделано меньше ε), поскольку функция f_ε непрерывно дифференцируема. Лемма доказана.

В заключение отметим, что для интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции f справедливо утверждение

$$\lim_{p \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos px\, dx = 0,$$

доказательство которого дословно повторяет приведённое выше доказательство леммы Римана—Лебега.

§ 5. Ядро Дирихле

Предположим, что в промежутке $[-\pi, \pi]$ задана интегрируемая функция f. Вычислим её коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и составим по ним ряд Фурье нашей функции:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Приступим к изучению вопроса о сходимости этого ряда в данной точке к значению функции f в этой точке. Положив

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

мы можем переформулировать наш вопрос так: верно ли, что для данного $x \in [-\pi, \pi]$ $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, т.е. что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ будет выполнено неравенство

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon?$$

Преобразуем $S_n(x)$, подставив в его определение вместо коэффициентов a_m, b_m их выражения из формул Эйлера — Фурье:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}(\cos mt \cos mx + \sin mt \sin mx)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(t-x)\right\} dt.$$

Теперь воспользуемся формулой

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{8}$$

получить которую можно, просуммировав равенства

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha}{2} &&= \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2},\\
&\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} &&= \cos\alpha \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2},\\
&\ldots && \ldots\\
&\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{2n-1}{2}\alpha &&= \cos n\alpha \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

каждое из которых в свою очередь вытекает из известного тригонометрического тождества

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

В итоге получаем для $S_n(x)$ выражение

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\dfrac{t-x}{2}}\,dt,$$

правая часть которого называется *интегралом Дирихле.*

Преобразуем интеграл Дирихле, сделав в нём замену переменной $z = t - x$. Продолжив функцию f с промежутка $[-\pi,\pi]$ на всю числовую прямую так, чтобы она стала 2π-периодической, мы получим, что интеграл Дирихле берётся от 2π-периодической функции и, следовательно, не зависит от того, по какому именно промежутку длины 2π он вычисляется. Поэтому при интегрировании по z мы можем сохранить прежние пределы, что приводит к выражению

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}z}{2\sin\dfrac{z}{2}}\,dz.$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}z}{2\sin\dfrac{z}{2}}$$

называется *ядром Дирихле.* Из равенства (8) непосредственно следует, что при любом n ядро Дирихле D_n является чётной функцией и

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz = 1.$$

Используя последнее свойство, запишем разность $S_n(x) - f(x)$ в виде

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \, dz. \qquad (9)$$

Таким образом, мы свели вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ к вопросу о стремлении к нулю интеграла (9), чем и воспользуемся в следующем параграфе.

§ 6. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье

Определение. 2π-периодическая функция f называется *кусочно-гладкой*, если в промежутке $[-\pi, \pi]$ найдётся конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ таких, что на каждом открытом интервале (x_j, x_{j+1}) функция f непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j она имеет конечные пределы слева и справа

$$f(x_j - 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j - h), \qquad f(x_j + 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j + h),$$

а также — конечные левую и правую производные

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \qquad \lim_{h \to +0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}.$$

Чтобы получить типичные примеры кусочно-гладких 2π-периодических функций, сузим на промежуток $[-\pi, \pi]$: а) любую непрерывно дифференцируемую функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) функцию $f(x) = |x|$; в) функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$, а результат продолжим на всю вещественную прямую до 2π-периодической функции.

Заметим ещё, что кусочно-гладкая 2π-периодическая функция может иметь точки разрыва только первого рода и ограничена на всей числовой прямой.

Теорема. *Ряд Фурье кусочно-гладкой 2π-периодической функции f сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а его сумма равна числу $f(x)$, если x — точка непрерывности функции f, и равна $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, если x — точка разрыва функции f.*

Доказательство. Поскольку в точке непрерывности выполняется равенство $f(x) = [f(x+0) + f(x-0)]/2$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться, что и для точки непрерывности, и для точки разрыва мы имеем

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Пользуясь тем, что интеграл от ядра Дирихле равен единице, представим эту разность в виде

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\cdots + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cdots =$$

[сделаем в первом из этих интегралов замену переменной $z \to -z$ и продолжим вычисления]

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+z) - f(x+0) + f(x-z) - f(x-0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left[\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z} + \frac{f(x-z)-f(x-0)}{z}\right]\frac{z}{\sin\frac{z}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz.$$

Функция

$$\left[\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z} + \frac{f(x-z)-f(x-0)}{z}\right]\frac{z}{\sin\frac{z}{2}} \tag{10}$$

ограничена в окрестности точки $z = 0$, поскольку при $z \to 0$ выражение в квадратных скобках стремится к разности левой и правой производных функции f в точке x, которые конечны по предположению, а $z^{-1}\sin(z/2) \to 2$. С другой стороны, для любого $\delta > 0$ ограниченность функции (10) на промежутке $[\delta, \pi]$ очевидна. Кроме того, (10) имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода. Значит, функция (10) интегрируема по промежутку $[0, \pi]$. Поэтому в силу леммы Римана — Лебега последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что известны и другие, в том числе более слабые условия, обеспечивающие сходимость ряда Фурье. Однако следует иметь в виду, что одной только непрерывности функции для этого недостаточно.

Задача

22. Докажите, что если f_1 и f_2 — две 2π-периодические кусочно-гладкие функции, совпадающие в некоторой окрестности точки x_0, то ряды Фурье функций f_1 и f_2 в точке x_0 сходятся или расходятся одновременно и притом к одной и той же сумме. [Это утверждение называется *принципом локализации*, поскольку провозглашает, что сходимость ряда Фурье в некоторой точке определяется локальным поведением функции в окрестности этой точки, несмотря на то, что коэффициенты ряда Фурье определяются (в соответствии с формулами Эйлера — Фурье) её поведением на всём интервале $[-\pi, \pi]$.]

§ 7. Примеры разложения функции в ряд Фурье и суммирования числового ряда с помощью ряда Фурье

Зададим функцию f формулой

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } \pi, \\ -\pi/4, & \text{если } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

и найдём её коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \text{ так как функция } f \text{ нечётна;}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 1/n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Другими словами, мы вычислили формальный ряд Фурье функции f:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Но для функции f, очевидно, выполняются условия теоремы из предыдущего параграфа, а значит, для всех $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \tag{11}$$

Полагая в нём $x = \pi/2$, найдём сумму замечательного числового ряда

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Задачи

23. Подставив в формулу (11) значение $x = \pi/4$, найдите сумму соответствующего числового ряда.

24. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье:

а) на промежутке $[-\pi, \pi]$ по косинусам;

б) на промежутке $(0, \pi)$ по синусам;

в) на промежутке $(0, 2\pi)$ по синусам и косинусам.

Пользуясь этими разложениями, найдите суммы рядов:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sigma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Разложите в ряд Фурье следующие функции:

25. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$.

26. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

27. $f(x) = \ln|\sin(x/2)|$.

28. $f(x) = \ln|\operatorname{tg}(x/2)|$.

§ 8. Комплексная форма ряда Фурье

Как известно из курса алгебры, экспонента от чисто мнимого аргумента определяется равенством $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Отсюда немедленно вытекают *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливые для всех вещественных чисел φ.

Предполагая, что функция f разлагается в ряд Фурье, заменим в нём синусы и косинусы по формулам Эйлера:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$c_n = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & n > 0; \\ a_0/2, & n = 0; \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & n < 0. \end{cases}$$

Вновь используя формулы Эйлера, преобразуем выражения для коэффициентов c_n:

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \text{ если } n > 0;$$

$$c_0 = a_0/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i0x}\,dx;$$

$$c_n = (a_{-n} + ib_{-n})/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - \sin nx]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \text{ если } n < 0.$$

Итак, мы видим, что для всех значений n коэффициенты c_n ищутся по одной формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

При этом имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

называемое *комплексной формой ряда Фурье*. Оно короче и симметричнее своего вещественного аналога и поэтому чаще используется в физике.

Задачи

Найдите ряды Фурье в комплексной форме следующих функций.

29. $f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$. 30. $f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$.

Следующие функции разложите в ряд Фурье с использованием комплексной формы ряда Фурье ($|a| < 1$):

31. $f(x) = \dfrac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}$.

32. $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$.

33. $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$.

34. $f(x) = \dfrac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}$.

35. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[-\pi, \pi]$, вещественнозначна, если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

36. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[-\pi, \pi]$, является чётной (т.е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = c_{-n}$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

37. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[-\pi, \pi]$, является нечётной (т.е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = -f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = -c_{-n}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

§ 9. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Из общей теории функциональных рядов известно, насколько важно уметь дифференцировать и интегрировать функциональные ряды почленно. Известно также, что для степенных рядов нет необходимости использовать общие теоремы. Убедимся, что сходная ситуация имеет место для рядов Фурье.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция. Как мы уже знаем, она представима своим рядом Фурье, а значит, для всех $x \in \mathbb{R}$ можно записать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

При этом её производная f' непрерывна и 2π-периодична, а значит, о сходимости её ряда Фурье мы ничего сказать не можем, но формальный ряд Фурье построить можно:

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx).$$

Теорема (о дифференцировании ряда Фурье). *При сделанных выше предположениях справедливы равенства* $a_0' = 0$, $a_n' = nb_n$, $b_n' = -na_n$, $(n \geq 1)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим для любого $n > 0$

$$a_n' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} nf(x) \sin nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{(-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)]}{\pi} + nb_n = nb_n.$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

Название этой теоремы объясняется тем, что она обосновывает законность почленного дифференцирования ряда Фурье гладкой функции:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) \sim f'(x) =$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

однако в результате мы получим формальный ряд Фурье для производной.

Пусть теперь функция g непрерывна, 2π-периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = 0$. Мы можем написать её формальный ряд Фурье (ничего не утверждая о его сходимости):

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим, кроме того, непрерывно дифференцируемую 2π-периодическую функцию $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ и разложим её в (сходящийся к ней) ряд Фурье:

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \tag{12}$$

Теорема (об интегрировании ряда Фурье) . *При сделанных выше предположениях справедливы равенства* $A_0/2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$, $A_n = -b_n/n$, $B_n = a_n/n$ $(n \geq 1)$.

Доказательство. Поскольку $G'(x) = g(x)$, то при $n \geq 1$ нужные равенства вытекают из предыдущей теоремы. Полагая теперь в равенстве (12) $x = 0$, получим

$$0 = G(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Теорема доказана.

Последняя теорема обосновывает законность почленного интегрирования ряда Фурье непрерывной функции:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = G(x) = \int_0^x g(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_0^x \cos nt\,dt + b_n \int_0^x \sin nt\,dt\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nt}{n}\Bigg|_0^x - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cos nt}{n}\Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Таким образом, при почленном интегрировании ряда Фурье не надо заботиться о его сходимости: для непрерывной функции даже из формального ряда мы получаем сходящийся.

§ 10. Задача о наилучшем приближении и неравенство Бесселя

Тригонометрическим многочленом n-го порядка называется выражение

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

Фиксируем n и попробуем найти тригонометрический многочлен n-го порядка, наиболее хорошо приближающий данную функцию f.

Прежде всего обсудим, что значит "наиболее хорошее приближение". В качестве меры уклонения многочлена T_n от функции f было бы естественно взять величину

$$\sup_x |T_n(x) - f(x)|$$

и считать, что приближение тем лучше, чем эта величина меньше. Вы работали с этой величиной, когда изучали функциональные ряды и называли её *супремум-нормой* или *C-нормой* функции $T_n - f$. Напомним, что эта величина меньше ε, если и только если график многочлена T_n лежит в полосе шириной 2ε, построенной вокруг графика функции f. Однако в некоторых задачах за меру уклонения удобнее брать среднее отклонение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|\,dx$$

или же среднее квадратичное отклонение

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2\,dx}.$$

Мы остановимся на последнем варианте, убрав несущественные сейчас корень и постоянный множитель.

Итак, точная формулировка задачи о наилучшем приближении, к решению которой мы и приступаем, такова: среди всех тригонометрических многочленов данного порядка n найти тот, для которого величина

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2\,dx$$

принимает наименьшее значение.

Теорема. *Среди всех тригонометрических многочленов данного порядка n величина*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2\,dx$$

принимает наименьшее значение для того многочлена, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье функции f.

Доказательство. Для начала преобразуем подынтегральное выражение минимизируемого интеграла:

$$|T_n(x) - f(x)|^2 = \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)\right]^2 =$$

$$= f^2(x) + \alpha_0^2/4 + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m^2 \cos^2 mx + \beta_m^2 \sin^2 mx) -$$

$$- \alpha_0 f(x) - 2\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) f(x) + \sigma_n(x), \quad (13)$$

где $\sigma_n(x)$ обозначает линейную комбинацию функций вида $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos mx \cos kx$, $\cos mx \sin kx$, $\cos mx \sin mx$ и $\sin mx \sin kx$ при $k \neq m$. Поскольку интеграл по промежутку $[-\pi, \pi]$ от каждой из этих функций равен нулю, то $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x)\, dx = 0$. Учитывая ещё, что $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$, проинтегрируем формулу (13) по промежутку $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \frac{\pi\alpha_0^2}{2} +$$

$$+\pi \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m^2 + \beta_m^2) - \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx -$$

$$-2\sum_{m=1}^{n}\left(\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx + \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx\right).$$

Продолжим преобразования, воспользовавшись формулами Эйлера — Фурье:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \frac{\pi\alpha_0^2}{2} + \pi\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m^2 + \beta_m^2) -$$

$$-\pi a_0 \alpha_0 - 2\pi \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m a_m + \beta_m b_m).$$

Наконец, выделяя полный квадрат, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 - \frac{\pi}{2}a_0^2 +$$
$$+ \pi \sum_{m=1}^{n} \left[(\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2\right] - \pi \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2). \quad (14)$$

Первое, третье и пятое слагаемые в правой части равенства (14) не зависят от α_m, β_m. Второе и четвёртое слагаемые неотрицательны. Значит, интересующий нас интеграл будет принимать минимальное значение, если и только если коэффициенты α_m, β_m выбраны так, что второе и четвёртое слагаемые обращаются в нуль, т.е. если $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_m = a_m$, $\beta_m = b_m$ $(m \geq 1)$. Теорема доказана.

Из равенства (14) вытекает ещё одно важное свойство коэффициентов ряда Фурье, называемое неравенством Бесселя.

Теорема (неравенство Бесселя). *Если квадрат функции f интегрируем по промежутку $[-\pi, \pi]$, то числовой ряд*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

сходится и имеет место неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Доказательство. Заменяя в равенстве (14) произвольный многочлен T_n частичной суммой

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

ряда Фурье функции f, получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2).$$

Левая его часть неотрицательная, поскольку мы интегрируем неотрицательную функцию. Значит,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \tag{15}$$

Все члены числового ряда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{16}$$

неотрицательны, а значит, его частичные суммы монотонно возрастают. Но согласно (15) все они ограничены одним и тем же конечным числом и поэтому имеют конечный предел. Другими словами, это означает, что ряд (16) сходится. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве (15), завершим доказательство теоремы.

§ 11. Равномерная сходимость рядов Фурье

Напомним, что последовательность функций f_n сходится к функции f равномерно на промежутке $[a,b]$, если величина

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|,$$

называемая *супремум-нормой* функции $f-f_n$, стремится к нулю при $n\to\infty$. Ряд Фурье называется *равномерно сходящимся*, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда.

Из общей теории функциональных рядов ясно, почему важно понятие равномерной сходимости: оно фигурирует в теоремах о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости функционального ряда. Однако эти вопросы для тригонометрических рядов мы уже рассмотрели выше с помощью специфических приёмов, не использующих общей теории функциональных рядов. Поэтому сейчас для нас вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье имеет характер чистого любопытства: верно ли, что для достаточно больших n график частичной суммы ряда Фурье S_n целиком попадает в полоску между графиками функций $f+\varepsilon$ и $f-\varepsilon$?

Теорема. *Если 2π-периодическая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, то её ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой.*

Доказательство. Мы уже знаем, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ ряд Фурье функции f сходится поточечно, поскольку $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Равномерную сходимость установим с помощью признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, который утверждает, что если для каждого номера n найдутся числа c_n такие, что для всех $x \in [a,b]$ выполняются неравенства $|f(x)| \le c_n$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a,b]$.

Пусть, как обычно, a_n, b_n обозначают коэффициенты Фурье функции f, а a'_n, b'_n — коэффициенты Фурье функции f'. Из теоремы о дифференцировании ряда Фурье вытекает, что $|a_n| = |b'_n|/n$ и $|b_n| = |a'_n|/n$, а значит,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |a'_n|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |b'_n|^2\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|a'_n|^2 + |b'_n|^2)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ [среднее неравенство написано на основании очевидной формулы $yz \le (y^2 + z^2)/2$]. Сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ вам известна из курса математического анализа, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a'_n|^2 + |b'_n|^2)$ сходится на основании неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty$$

[ведь промежуток $[-\pi, \pi]$ имеет конечную длину, а функция f непрерывна, а значит, и ограничена на нём]. Таким образом, заключение теоремы вытекает из признака Вейерштрасса.

§ 12. Явление Гиббса

Явлением Гиббса называется особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции, впервые обнаруженная Уилбрейамом в 1848 г. и позже переоткрытая Гиббсом в 1898 г.

Знакомство с явлением Гиббса мы начнём с рассмотрения простейшей разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = \pi; \\ -1, & \text{если } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Из § 7 известно, что для всех $|x| \leq \pi$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Можно показать [см., напр.: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука, 1969. Т. 3, п. 700], что график функции

$$S_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$$

на промежутке $[0, \pi]$ осциллирует вокруг значения $y = 1$, причём амплитуда "горбов" убывает по мере удаления от концов промежутка, а глобального максимума функция S_{2n-1} достигает в точках $x = \pi/2n$ и $x = \pi - \pi/2n$. Для иллюстрации на рис. 3, 4 приведены графики функций $S_1 - S_7$, S_{21} и S_{99}.

С учётом сказанного для амплитуды $\mathcal{A}(S_{2n-1})$ функции S_{2n-1} на промежутке $[-\pi, \pi]$ будем иметь

$$\mathcal{A}(S_{2n-1}) = \max_{x \in [-\pi, \pi]} S_{2n-1}(x) = S_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m-1)\frac{\pi}{2n}}{(2m-1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

В последнем выражении легко узнать сумму Римана интеграла

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx,$$

соответствующую разбиению интервала $[0, \pi]$ на n равных частей. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\mathcal{A}(S_{2n-1}) \to \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

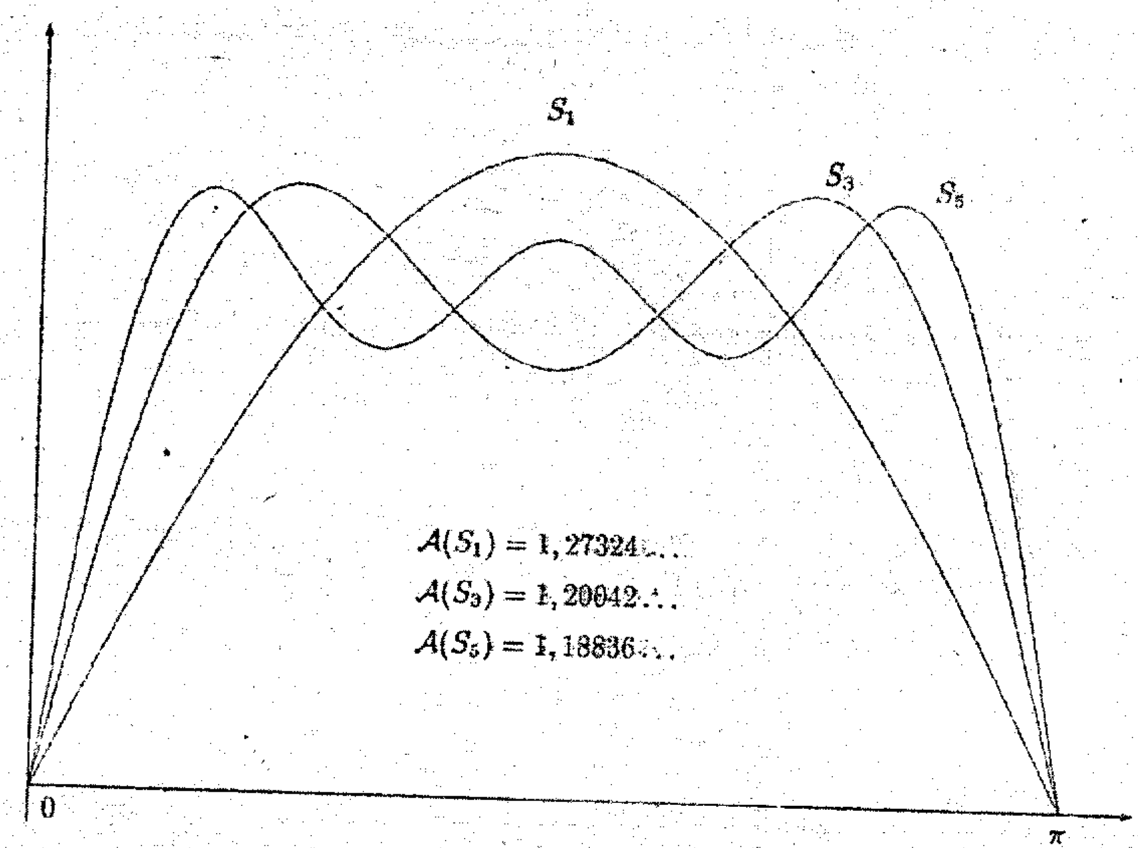
S_1
S_3
S_5
$\mathcal{A}(S_1) = 1,27324\ldots$
$\mathcal{A}(S_3) = 1,20042\ldots$
$\mathcal{A}(S_5) = 1,18836\ldots$
0
π

Рис. 3

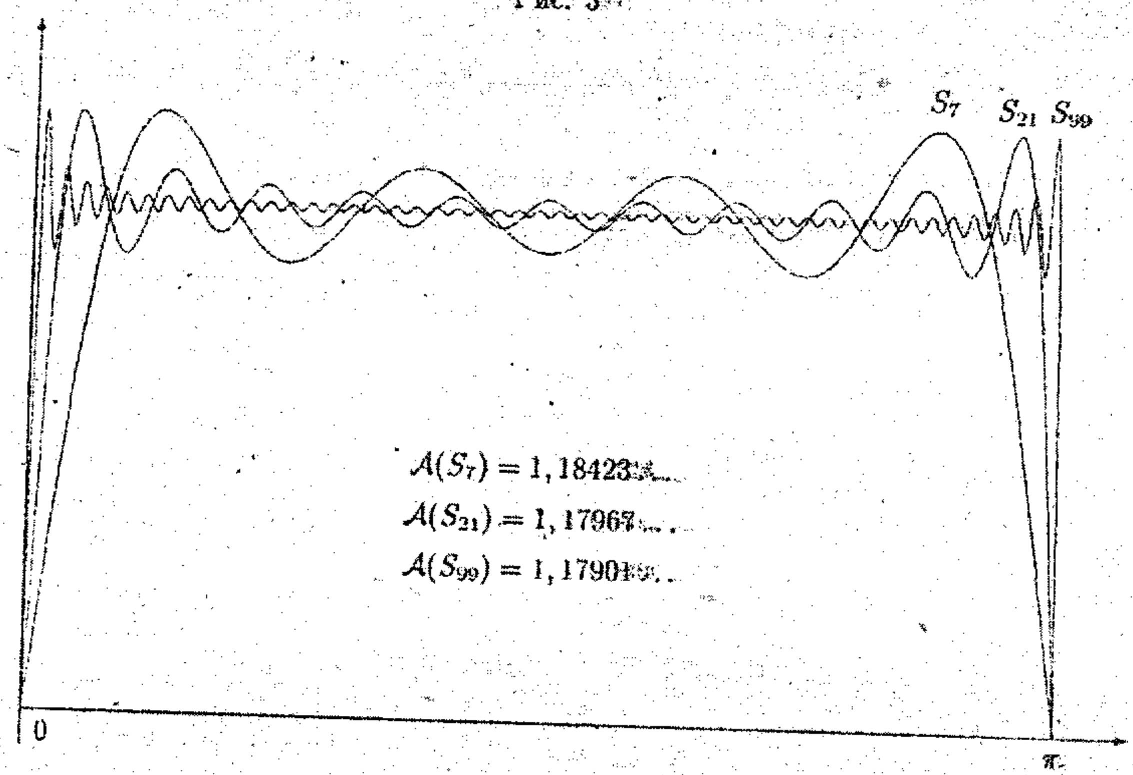
S_7
S_{21}
S_{99}
$\mathcal{A}(S_7) = 1,18423\ldots$
$\mathcal{A}(S_{21}) = 1,17967\ldots$
$\mathcal{A}(S_{99}) = 1,17901\ldots$
0
π

Рис. 4

Функция

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

называется интегральным синусом. Про неё известно, что она не выражается через элементарные функции. Однако для неё составлены таблицы значений, из которых находим $\mathrm{Si}(\pi) \approx 1,85194\ldots$, а значит, $\mathcal{A}(S_{2n-1}) \to 1,17898\ldots$.

Таким образом, при $n \to \infty$ амплитуда частичной суммы S_{2n-1} ряда Фурье функции f примерно на 18% превышает амплитуду самой функции f.

Другими словами можно сказать, что "предельным геометрическим образом" при $n \to \infty$ графиков функций S_{2n-1} является не первоначальная ступенька — график функции f (как естественно было бы ожидать), а ступенька с удлинённым примерно на 18% вертикальным отрезком (рис. 5). Этот эффект и называется явлением Гиббса.

Дадим формальное определение, предполагая для определённости, что $f(x_0-0) \le f(x_0+0)$: говорят, что для функции f в точке x_0 имеет место *явление Гиббса*, если

$$\varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} S_n(x) < f(x_0-0) \le f(x_0+0) < \varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0+0}} S_n(x).$$

Выше мы убедились, что явление Гиббса имеет место для функции $\operatorname{sgn} x$. Более тонкий анализ показывает, что оно имеет место (причём с той же самой постоянной — 18% !) для любой кусочно-гладкой функции f (подробнее см., напр.: Фихтенгольц Г. М. Указ. соч. Т.3, п. 701).

§ 13. Гладкость функции и скорость сходимости её ряда Фурье

Начнём с двух вспомогательных утверждений.

Лемма (неравенство Коши — Буняковского). *Пусть последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ вещественных чисел*

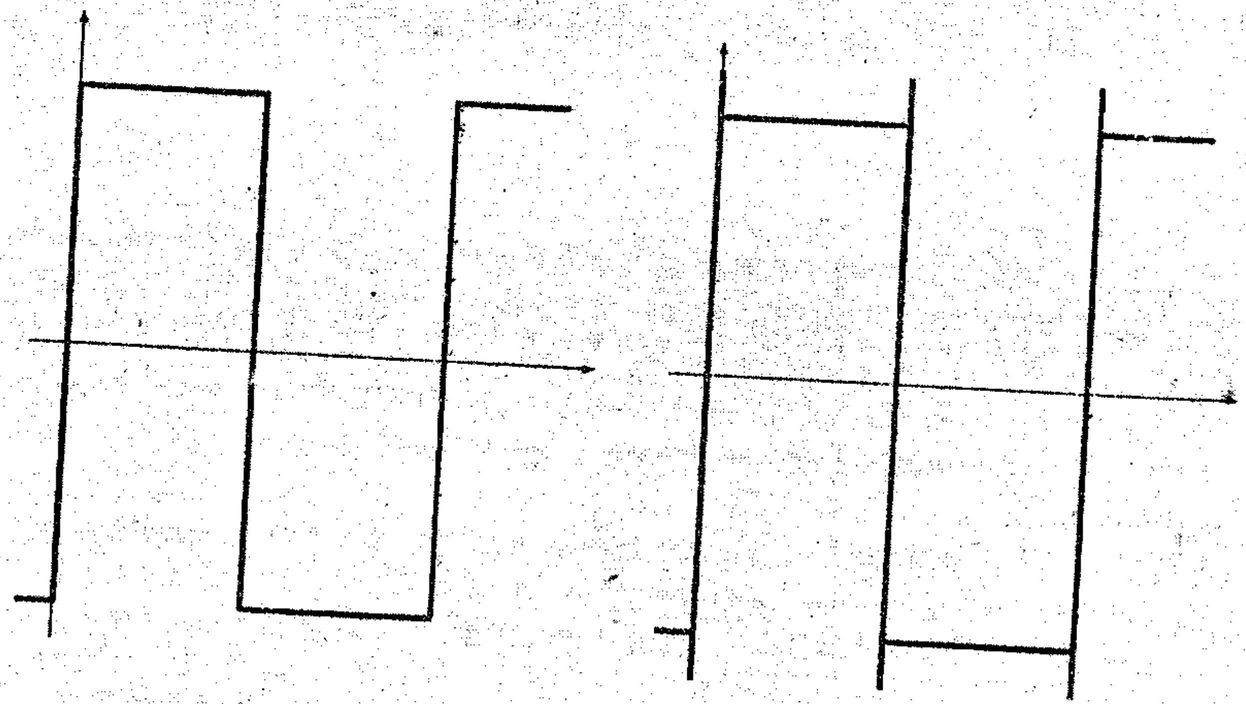

Рис. 5

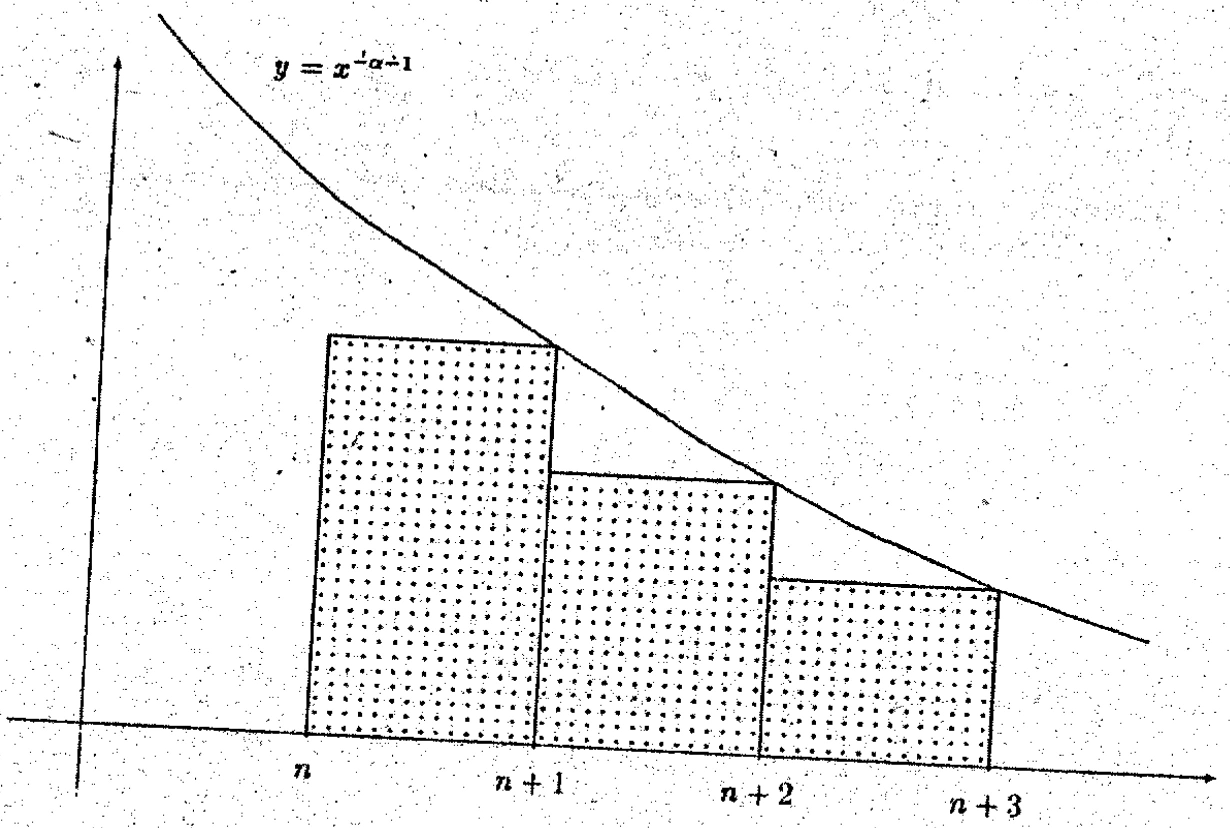

Рис. 6

таковы, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \quad \textit{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$$

сходятся. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \beta_n^2 \tag{17}$$

также сходится и имеет место неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \beta_n^2\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\right).$$

Доказательство. Фиксируем натуральное число n и рассмотрим сумму

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m t - \beta_m)^2.$$

С одной стороны, ясно, что для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\sigma_n \ge 0$. С другой стороны, раскрыв скобки, мы получим квадратный трёхчлен

$$\sigma_n = At^2 - 2Bt + C,$$

где использованы обозначения $A = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m^2$, $B = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m \beta_m$ и $C = \sum\limits_{m=1}^{n} \beta_m^2$. Как известно, такой трёхчлен неотрицателен, если и только если его дискриминант неположителен:

$$B^2 - AC \le 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^2 \beta_m^2\right)^2 \le \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^2\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{n} \beta_m^2\right). \tag{18}$$

Здесь можно было бы закончить доказательство, сказав что-нибудь вроде "переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство". Однако мы продвинемся немного дальше и действительно докажем сходимость ряда (17). При этом уместно опираться на критерий Коши сходимости числовых рядов, утверждающий, что ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если и только если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число n_ε такое, что для всех $p > 0$ и $n \geq n_\varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$\left| \sum_{m=1}^{n+p} x_m \right| < \varepsilon.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь тем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится, найдём натуральное число n'_ε такое, чтобы для всех $p > 0$ и $n \geq n'_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{m=n}^{n+p} \alpha_n^2 \right| < \varepsilon.$$

Кроме того, используя сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$, найдём натуральное число n''_ε такое, чтобы для всех $p > 0$ и $n \geq n''_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{m=n}^{n+p} \beta_n^2 \right| < \varepsilon.$$

Тогда из неравенства (18) вытекает, что для всех $p > 0$ и $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$

$$\left| \sum_{m=n}^{n+p} \alpha_m \beta_m \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{m=n}^{n+p} \alpha_n^2 \right) \cdot \left(\sum_{m=n}^{n+p} \beta_n^2 \right)} < \varepsilon,$$

а значит, в силу критерия Коши ряд (17) сходится. Переходя в (18) к пределу, завершим доказательство леммы.

Лемма. *Если $\alpha > 0$ и $n \geq 1$, то*

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Изобразим члены ряда графически в виде прямоугольников с основанием 1 и высотой $1/m^{\alpha+1}$ (рис. 6). Ясно, что все эти прямоугольники лежат ниже графика функции $1/x^{\alpha+1}$, а значит, их суммарная площадь не превосходит площади подграфика этой функции, т.е. интеграла от неё:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha+1}} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha}.$$

Теорема. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодична и имеет $(k+1)$-ю непрерывную производную ($k \geq 1$). Тогда остаток ряда Фурье функции f*

$$R_n(x) \equiv f(x) - S_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

допускает оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right).$$

Доказательство. Пусть A_n и B_n являются коэффициентами Фурье функции $f^{(k+1)}$. Вспоминая теорему о дифференцировании ряда Фурье и меняя, если нужно, A_n и B_n ролями, будем иметь

$$|a_n| = \frac{|A_n|}{n^{k+1}}, \quad |b_n| = \frac{|B_n|}{n^{k+1}}.$$

Тогда, используя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь для всех $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|A_m| + |B_m|}{m^{k+1}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} (|A_m| + |B_m|)^2} \cdot \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k+2}}}.$$

Используя очевидное неравенство $(y+z)^2 \leq 2(y^2+z^2)$ и лемму, непосредственно предшествующую данной теореме, продолжим вычисления:

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} 2\,(A_m^2 + B_m^2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{n^{2k+1}}} = \alpha_n \cdot \frac{1}{n^{k+1/2}},$$

где введено обозначение

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} 2\left(A_m^2 + B_m^2\right)}{2k+1}}.$$

В силу неравенства Бесселя для функции $f^{(k+1)}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n^2$ сходятся. Следовательно, в числителе последнего выражения для α_n стоит хвост сходящегося ряда, который, как известно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, что и доказывает теорему.

§ 14. Равенство Ляпунова

Теорема (равенство Ляпунова). *Пусть функция* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *такова, что*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < +\infty,$$

и пусть a_n, b_n *— её коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

называемое равенством Ляпунова.

Доказательство проведём в том частном случае, когда после продолжения функции f до 2π-периодической функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы получим непрерывно дифференцируемую функцию. Как известно из § 10, её ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой. Поэтому, обозначив, как обычно, частичную сумму ряда Фурье функции f через S_n, заключаем, что S_n стремится к f равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Значит, в равенстве

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi\sum_{m=1}^{n}\left(a_m^2 + b_m^2\right),$$

выведенном в ходе доказательства неравенства Бесселя, можно перейти к пределу при $n \to \infty$ под знаком интеграла, стоящего в его левой части. Что и завершит доказательство теоремы в рассматриваемом случае.

Общий случай равенства Ляпунова выводится из только что рассмотренного с помощью следующей разновидности уже знакомого нам утверждения, согласно которому *всякую 2π-периодическую функцию, интегрируемую с квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно сколь угодно близко приблизить непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функцией*, т. е. согласно которому для любой 2π-периодической функции f такой, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < +\infty$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция f_ε такая, что $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f_\varepsilon(x)]^2\,dx < \varepsilon$. Детальное рассмотрение этого случая мы опускаем, отсылая заинтересованного читателя, например, к курсу Г.М.Фихтенгольца.

Следствие 1 (обобщённое равенство Ляпунова). *Пусть квадраты функций f и g интегрируемы на промежутке $[-\pi, \pi]$ и пусть a_n, b_n и α_n, β_n — коэффициенты Фурье функций f и g соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

называемое обобщённым равенством Ляпунова.

Доказательство. Поскольку для каждого $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство $[f(x) \pm g(x)]^2 \le 2[f^2(x) + g^2(x)]$, то квадраты обеих функций $f + g$ и $f - g$ интегрируемы на промежутке $[-\pi, \pi]$. Более того, из формул Эйлера — Фурье очевидно, что коэффициенты Фурье функций $f + g$ и $f - g$ равны $a_n + \alpha_n$, $b_n + \beta_n$ и $a_n - \alpha_n$, $b_n - \beta_n$ соответственно. Поэтому на основании предыдущей теоремы можем написать

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) + g(x)\right]^2 dx,$$

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - g(x)\right]^2 dx.$$

Вычитая эти равенства почленно одно из другого и учитывая очевидное тождество $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$, получим утверждение следствия 1.

Следствие 2 (комплексная форма равенства Ляпунова). *Пусть квадрат функции f интегрируем на промежутке $[-\pi, \pi]$ и пусть c_n — коэффициенты Фурье функции f в комплексной форме, т. е.*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

называемое комплексной формой равенства Ляпунова.

Доказательство. При выводе комплексной формы ряда Фурье в § 8 нами было показано, что

$$c_n = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & \text{если } n > 0, \\ a_0/2, & \text{если } n = 0, \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \cdot \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2), & \text{если } n > 0, \\ \frac{1}{2}a_0 \cdot \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{4}a_0^2, & \text{если } n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \cdot \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}) = \frac{1}{4}(a_{-n}^2 + b_{-n}^2), & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Значит, на основании предыдущей теоремы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{-n}^2 + b_{-n}^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

38. Напишите равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < \alpha, \\ 0, & \text{если } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

и найдите с его помощью суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

39. Напишите равенства Ляпунова для функций $f(x) = \cos\alpha x$ и $g(x) = \sin\alpha x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

40. Используя результат предыдущей задачи, выведите следующие классические разложения функций $\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi$ и $(\pi/\sin\alpha\pi)^2$ по рациональным функциям

$$\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

$$\left(\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

[Здесь предполагается, что α не является целым числом.]

41. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

имеет место неравенство

$$\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx \leq \int_0^{\pi}[f'(x)]^2\,dx,$$

называемое *неравенством Стеклова*, и убедитесь, что равенство в нём осуществляется лишь для функций вида $f(x) = A\cos x$.

42. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0,\pi]$. Докажите, что при выполнении условия $f(0) = f(\pi) = 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^\pi [f(x)]^2\,dx \le \int_0^\pi [f'(x)]^2\,dx,$$

также называемое *неравенством Стеклова*, и убедитесь, что равенство в нём имеет место лишь для функций вида $f(x) = B\sin x$.

43. Пусть функция f непрерывна в промежутке $[-\pi,\pi]$ и имеет в нём (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную f', интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx,$$

называемое *неравенством Виртингера*, причём равенство в нём имеет место лишь для функций вида $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

44. Выведите комплексную форму обобщённого равенства Ляпунова.

45. Покажите, что комплексная форма равенства Ляпунова справедлива не только для вещественнозначных функций (как это было продемонстрировано выше), но и для комплекснозначных функций.

§ 15. Применение рядов Фурье к нахождению функции, гармонической в круге, по её значениям на границе

В этом параграфе мы найдём функцию $u(x,y)$, заданную и непрерывную в круге $x^2+y^2 \le 1$, удовлетворяющую *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (19)$$

в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$ и граничному условию

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = f(x, y) \tag{20}$$

на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Напомним, что функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической*. Теория гармонических функций имеет обширные приложения в физике, поскольку, например, известно, что как скалярный потенциал электромагнитного поля, так и потенциал скорости установившегося потока несжимаемой жидкости удовлетворяют уравнению Лапласа. Изучая формулу Грина в курсе математического анализа, вы доказали следующую теорему единственности: *если ограниченная область на плоскости имеет гладкую границу и две гармонические функции совпадают на её границе, то они совпадают всюду в этой области* (доказательство этого утверждения см., напр.: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука. 1969. Т. 3, п. 602.) Сейчас же мы укажем явную формулу для решения уравнения (19) с граничным условием (20).

На плоскости переменных (x, y) введём полярные координаты (r, φ) с помощью обычных формул

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

При этом функция $u(x, y)$ превратится в функцию $u(r, \varphi)$, зависящую от переменных r и φ, причём, очевидно, $u(r, \varphi)$ является 2π-периодической функцией по φ. Аналогично функция $f(x, y)$ превратится в 2π-периодическую функцию $f(\varphi)$, зависящую только от переменной φ.

Разложим данную нам 2π-периодическую функцию f в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{21}$$

и будем искать функцию $u(r, \varphi)$ также в виде тригонометрического ряда

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi], \tag{22}$$

происхождение которого очень просто: зафиксировав r, мы разлагаем 2π-периодическую функцию $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье, а затем замечаем, что для другого значения r коэффициенты Фурье в этом разложении будут уже другими, т. е. они являются функциями от r, что и отражено в (22).

При изучении темы "Замена переменных в дифференциальных выражениях" в курсе математического анализа вы находили выражение для оператора Лапласа в полярных координатах и знаете, что оно имеет вид

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

(обоснование этой формулы см., напр.: Фихтенгольц Г. М.. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука, 1970. Т.1, п. 222).

Допустим, что функция $u(r,\varphi)$ такова, что равенство (22) можно дважды дифференцировать почленно по r и φ:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{a_0'(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n'(r)\cos n\varphi+b_n'(r)\sin n\varphi],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{a_0''(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n''(r)\cos n\varphi+b_n''(r)\sin n\varphi],$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}[-a_n(r)n\sin n\varphi+b_n(r)n\cos n\varphi],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}[-a_n(r)n^2\cos n\varphi-b_n(r)n^2\sin n\varphi].$$

Штрих обозначает дифференцирование по r.

Подставив полученные выражения в уравнение Лапласа, будем иметь

$$r^2\frac{a_0''(r)}{2}+r\frac{a_0'(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big(r^2a_n''(r)+ra_n'(r)-n^2a_n(r)\big)\cos n\varphi+$$

$$+\big(r^2b_n''(r)+rb_n'(r)-n^2b_n\big)\sin n\varphi\Big]=0.$$

При каждом фиксированном значении r последнее равенство можно рассматривать как разложение в ряд Фурье функции, тождественно равной нулю (именно она стоит в правой части). Поскольку все коэффициенты Фурье функции, тождественно равной нулю, равны нулю, мы заключаем, что функция (22) удовлетворяет уравнению Лапласа, если и только если выполняются следующие условия:

$$r^2a_n''(r) + ra_n'(r) - n^2a_n(r) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$r^2b_n''(r) + rb_n'(r) - n^2b_n(r) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

В этом и состоит основная идея излагаемого здесь метода решения уравнения Лапласа, впервые предложенного Жозефом Фурье в 1822 г. для решения уравнения теплопроводности: мы свели задачу о решении уравнения в частных производных (уравнения Лапласа) к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (24). Правда, вместо одного уравнения Лапласа мы получили бесконечную систему (23), (24), но нам повезло в том отношении, что эта система является распавшейся: каждое её уравнение содержит только одну неизвестную функцию и поэтому может решаться независимо от остальных.

Непосредственная (и очень простая) проверка показывает, что функции

$$a_n(r) = a_n(1)r^n \quad \text{и} \quad b_n(r) = b_n(1)r^n$$

удовлетворяют уравнениям (23) и (24) соответственно при любом выборе постоянных $a_n(1)$ и $b_n(1)$. Эти постоянные должны быть найдены из начальных условий, которые следует добавить к уравнениям (23) и (24). Чтобы получить эти начальные условия, разложим функцию $f(\varphi) = u(1, \varphi)$, задающую граничные условия для уравнения Лапласа, в ряд Фурье с помощью равенств (21) и (22):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = f(\varphi) =$$

$$= u(1, \varphi) = \frac{a_0(1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(1)\cos n\varphi + b_n(1)\sin n\varphi].$$

Последние равенства означают, что одна и та же функция разложена в ряд Фурье двумя способами. Поскольку коэффициенты в обоих разложениях должны быть одинаковыми, мы получаем

$$a_n(1) = \alpha_n, \quad n \geq 0,$$

$$b_n(1) = \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, решение системы (23), (24) имеет вид $a_n(r) = \alpha_n r^n$, $b_n(r) = \beta_n r^n$, а значит, искомое решение уравнения Лапласа может быть записано в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Вообще говоря, последнее выражение уже даёт ответ к решаемой задаче, однако оно может быть упрощено. Чтобы сделать это, подставим в него вместо α_n и β_n их выражения по формулам Эйлера—Фурье и вынесем интегрирование за знак суммы:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\cos nt \cos n\varphi + \sin nt \sin n\varphi)r^n\right] dt. \quad (25)$$

Согласно известной тригонометрической формуле для косинуса разности двух углов выражение в круглых скобках равно $\cos n(t-\varphi)$. Таким образом, чтобы упростить интеграл, нам нужно научиться упрощать выражение

$$P_r(\theta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta\right).$$

Отметим, что это выражение очень напоминает левую часть формулы (8) из § 5, которую мы получили в процессе нахождения ядра Дирихле. Однако сейчас $r \neq 1$, и мы вынуждены применить иной метод суммирования.

Напомним, что согласно формуле Эйлера $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$, а значит, $\cos n\theta$ равняется вещественной части комплексного числа $e^{in\theta}$: $\cos n\theta = \operatorname{Re} e^{in\theta}$. Поэтому

$$P_r(\theta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(re^{i\theta})^n\right] = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n\right].$$

Теперь ясно, что нам нужно просуммировать бесконечную геометрическую прогрессию $q + q^2 + \dots + q^n + \dots$, общий член которой $q = re^{i\theta}$ является комплексным числом, по модулю меньшим единицы: $|q| = |re^{i\theta}| = r|e^{i\theta}| = r < 1$. Вскоре мы с вами разовьём теорию числовых рядов с комплексными членами так, что будет очевидно, что обычная формула суммирования геометрической прогрессии $q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = q/(1-q)$ применима и в этой ситуации. Воспользовавшись этим соображением, будем иметь

$$P_r(\theta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} + \frac{re^{i\theta}(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} + \frac{re^{i\theta}-r^2}{1-re^{i\theta}-re^{-i\theta}+r^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\frac{1-2r\cos\theta+r^2+2r\cos\theta+2i\sin\theta-2r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Выражение

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

называется *ядром Пуассона*. С его помощью мы можем записать

$$u(r,\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t-\varphi)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt.$$

Последнее выражение называется *интегралом Пуассона*.

Отметим, что приведённые выше рассуждения не доказывают, что интеграл Пуассона даёт решение уравнения Лапласа (19) с граничным условием (20): мы не обосновывали законность почленного дифференцирования ряда (22) и законность почленного интегрирования ряда (25). Однако прямая проверка (которую мы тем не менее опускаем), основанная на технике интегралов, зависящих от параметра, показывает, что для непрерывной функции f интеграл Пуассона действительно удовлетворяет уравнению Лапласа (19) и граничному условию (20).

Наконец, в наших рассуждениях есть ещё одно деликатное место: в качестве решений уравнений (23) и (24) мы взяли $a_n(r) = a_n(1)r^n$ и $b_n(r) = b_n(1)r^n$, в то время как общим решением каждого из них, очевидно, является $C_1r^n + C_2r^{-n}$. Возникает подозрение, что мы могли бы получить и какое-нибудь другое выражение для решения. Эти сомнения уничтожает цитированная в начале данного параграфа теорема единственности.

46. Повторяя рассуждения настоящего параграфа, но выбирая в качестве решений уравнений (23) и (24) функции вида Cr^{-n}, найдите решение уравнения Лапласа во внешности $x^2 + y^2 > 1$ единичного круга, которое стремится к нулю при $x^2 + y^2 \to +\infty$ и удовлетворяет граничному условию $u(x, y) = f(x, y)$ при $x^2 + y^2 = 1$.

47. *Волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — некоторая постоянная, описывает малые колебания однородной струны [при этом считается, что положение струны в момент времени t совпадает с графиком функции $u(t, x)$]. Предположим, что струна закреплена в концах $x = 0$, $x = \pi$, оттянута в начальный момент $t = 0$ в положение $u(0, x) = f(x)$ и отпущена без начальной скорости (т.е. $\partial u/\partial t(0, x) = 0$ для всех $x \in [0, \pi]$). Разлагая функцию $u(t, x)$ в ряд Фурье по синусам, получите для решения поставленной задачи *формулу Даламбера* $u(t, x) = [f(x + at) + f(x - at)]/2$. Убедитесь в её справедливости непосредственной проверкой.

48. Рассмотрим однородный тонкий стержень с концами $x = 0$ и $x = \pi$. Измеренную в момент времени t температуру точки этого стержня с координатой x обозначим через $u(t, x)$. Как известно, с течением времени перераспределение температуры в стержне происходит таким образом, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где a — некоторая постоянная, называемому *уравнением теплопроводности*. Предполагая, что на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура, скажем, равная нулю, и предполагая известным начальное распределение тепла (т. е. предполагая, что $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ и $u(0, x) = f(x)$), найдите решение уравнения теплопроводности.

§ 16. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Теорема (Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими многочленами). *Если непрерывная функция* $f : [-\pi, \pi] \to$

$\mathbb{R}$ *такова, что* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

такой, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ *будет выполняться неравенство* $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Продолжим f на всю числовую прямую до 2π-периодической функции, которую обозначим через F. Поскольку f непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$, то, очевидно, F — непрерывная функция.

Для каждого положительного числа h построим новую функцию $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$F_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} F(y)\, dy.$$

Говорят, что функция F_h получена из F посредством *усреднения по Стеклову*.

Приведём свойства функции F_h, необходимые для доказательства теоремы Вейерштрасса.

1). *Для каждого положительного* h *функция* F_h *непрерывно дифференцируема*, что немедленно вытекает из следующего хорошо известного правила дифференцирования по параметру интеграла, у которого и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от параметра

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x, y)\, dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\, dx + \beta'(y) g(\beta(y), y) - \alpha'(y) g(\alpha(y), y).$$

(Вывод этой формулы см., напр.: Фихтенгольц Г. М. Курса дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука, 1970. Т. 2, п. 509).

2). *При* $h \to 0$ *функция* F_h *сходится к* F *равномерно на всей числовой прямой.* Доказательство этого факта базируется на вычислении

$$|F(x) - F_h(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} F(x)\,dy - \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} F(y)\,dy \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} |F(x) - F(y)|\,dy \qquad (26)$$

и следующей теореме Кантора, известной вам из курса математического анализа: *всякая непрерывная в замкнутом промежутке функция равномерно непрерывна на нём*, т.е. если $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \delta$, справедливо неравенство $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Чтобы доказать свойство 2), зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдём с помощью теоремы Кантора число $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $|x-y| < \delta$ будет справедливо неравенство $|F(x)-F(y)| < \varepsilon$. Тогда для любого $0 < h < \delta/2$ величина подынтегральной функции в последнем интеграле формулы (26) не превосходит ε, а значит,

$$|F(x) - F_h(x)| \le \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} |F(x) - F(y)|\,dy \le \varepsilon.$$

Свойство 2) доказано.

Теперь всё готово для доказательства теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом. Задав $\varepsilon > 0$ выберем положительное число h столь малым, чтобы для любого $x \in [-\pi, \pi]$ выполнялось неравенство $|F(x)-F_h(x)| < \varepsilon/2$. Поскольку функция $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, то её ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой, а значит, найдётся номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ будет выполняться неравенство $|F_h(x) - S_{n_0}(x)| < \varepsilon/2$, где через $S_{n_0}(x)$ обозначена соответствующая частичная сумма ряда Фурье функции F_h.

Окончательно мы получаем, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ справедливы неравенства

$$|F(x) - S_{n_0}(x)| \le |F(x) - F_h(x)| + |F_h(x) - S_{n_0}(x)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

которые и доказывают утверждение теоремы.

Теорема (Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся алгебраический многочлен*

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m x^m$$

степени n такой, что для всех $x \in [a,b]$ будет выполняться неравенство $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $a = 0$ и $b = \pi$. Непрерывную функцию $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ продолжим чётным образом на интервал $[-\pi,\pi]$ и результат обозначим через F. Очевидно, функция F непрерывна и удовлетворяет условию $F(-\pi) = F(\pi)$. Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен

$$T_l(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{l} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

такой, что неравенство $|F(x) - T_l(x)| < \varepsilon$ будет выполняться для всех $x \in [-\pi,\pi]$.

С другой стороны, известно, что разложения в степенной ряд для синуса и косинуса

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

сходятся на всей числовой прямой. А поскольку всякий степенной ряд сходится равномерно на любом замкнутом интервале, содержащемся внутри области сходимости, то для каждой из $2l$ функций $\sin mx$ и $\cos mx$, $m = 1, 2, \ldots l$, входящих в T_l, можно указать частичную сумму

$$S(m,x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (mx)^{2k+1}, \quad C(m,x) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (mx)^{2k}$$

соответствующего степенного ряда (т. е. алгебраический многочлен достаточно высокой степени), приближающую эту функцию на интервале $[-\pi,\pi]$ с точностью до $\varepsilon/(2Ml)$, где через M обозначен максимум модулей чисел α_m, β_m $(m = 1, 2, \ldots, l)$. Другими словами, для каждой из функций $\sin mx$, $\cos mx$ $(m = 1, \dots, l)$ найдётся алгебраический многочлен $S(m, x)$ или $C(m, x)$ соответственно, такой что $|\sin mx - S(m, x)| < \varepsilon/(2Ml)$ и $|\cos mx - C(m, x)| < \varepsilon/(2Ml)$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Положим теперь

$$P_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{l} (\alpha_m S(m, x) + \beta_m C(m, x).$$

Тогда для алгебраического многочлена P_n мы будем иметь при любом $x \in [0, \pi]$

$$|f(x) - P_n(x)| = |F(x) - P_n(x)| \leq |F(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - P_n(x)| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{m=1}^{l} (|\alpha_m x||\sin mx - S(m, x)| + |\beta_m x||\cos mx - C(m, x)|) \leq 2\varepsilon,$$

что и завершает доказательство теоремы в случае $a = 0$, $b = \pi$.

Общий случай сводится к уже рассмотренному линейной заменой переменных. В самом деле, с помощью функции $g : [0, \pi] \to [a, b]$, линейно отображающей отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$, мы можем сопоставить произвольной непрерывной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ новую непрерывную функцию $f \circ g$, заданную уже на отрезке $[0, \pi]$. В соответствии с доказанным выше для функции $f \circ g$ найдётся алгебраический многочлен P_n, приближающий её с любой наперёд заданной точностью ε. Совершая в P_n обратную (линейную !) замену переменных, мы получим алгебраический многочлен $P_n \circ g^{-1}$, который, очевидно, приближает функцию f в интервале $[a, b]$ с точностью до ε:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - (P_n \circ g^{-1})(x)| = \sup_{y \in [0,\pi]} |(f \circ g)(y) - P_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Задача

49. Убедитесь, что для 2π-периодической функции, заданной на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = |x|$, явление Гиббса отсутствует.

Ответы

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **2.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **3.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **4.** $\frac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$. **6.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **7.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **8.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x$. **9.** $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **10.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\pi x$. **11.** $\frac{2}{3}-\frac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{3}\cos\frac{2\pi nx}{3}$. **12.** $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega x}{4n^2-1}$. **13.** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$. **14.** Если a не является целым числом, то $\frac{1-\cos a\pi}{\pi}\{1+2a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{a^2-(2n)^2}\}+2a\frac{1+\cos a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{a^2-(2n-1)^2}$; если $a=2m$ — целое чётное число, то $\frac{8m}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2-(2n-1)^2}$; если $a=2m-1$ — целое положительное нечётное число, то $\sin(2m-1)x=\frac{2}{\pi}\{1+2(2m-1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2m-1)^2-(2n)^2}\}$. **15а.** $e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+$ $+\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos nx$. **15б.** $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx$. **16.** $\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. **19.** $f(-x)=f(x)$, $f(\pi-x)=-f(x)$. **20.** $f(-x)=-f(x)$, $f(\pi-x)=f(x)$. **21а.** $a_n=0$, $b_{2n-1}=0$. **21б.** $a_n=0$, $b_{2n}=0$. **23.** $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\dots=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$. **24а.** $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. **24б.** $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$. **24в.** $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$, $\sigma_1=\frac{\pi^2}{6}$, $\sigma_2=\frac{\pi^2}{12}$, $\sigma_3=\frac{\pi^2}{8}$. **25.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x$. **26.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **27.** $-\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **28.** $-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$. **29.** $-\frac{i}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2inx}}{n}$, где подразумевается, что слагаемое, соответствующее $n=0$, пропущено. **30.** $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$. **31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx$. **32.** $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$.

33. $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}\cos nx$. **34.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$. **38.** $\dfrac{2\alpha^2}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 2\alpha n}{n^2}=$ 2α, $\alpha(\pi-\alpha)/2$, $(\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2)/6$. **39.** $1+\dfrac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha\pi}=2\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha^2\pi^2}+4\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$; $1-\dfrac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha\pi}=4\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$. **46.** $u(r,\varphi)=-\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)P_r(t-\varphi)\,dt=-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt$.

48. $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n e^{-a^2n^2t}\sin nx$, где $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

Предметный указатель

Содержание