НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1992

КОМИТЕТ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Методические указания

Новосибирск
1992

В методических указаниях изложены сведения о свойствах преобразования Лапласа и его приложениях, а также приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по математическому анализу на физическом факультете.

Методические указания предназначены для студентов и преподавателей физического факультета.

Составитель: В.А.Александров

© Новосибирский государственный университет, 1992

Предисловие

За последние несколько лет произошли значительные изменения в построении математических курсов на физическом факультете Новосибирского университета. В частности, в программу курса по математическому анализу включены следующие разделы: Ряды Фурье. Преобразование Фурье. Обобщенные функции. Вариационное исчисление. Геометрия пространств со скалярным произведением. Ортогональные многочлены. Операторы в гильбертовых пространствах. Интегральные уравнения. Преобразование Лапласа. Асимптотические разложения. Большинство из указанных тем очень слабо отражены или отсутствуют полностью в стандартных учебниках Фихтенгольца и Зорича и задачнике Демидовича. Для некоторых тем даже затруднительно указать удобный в работе учебник и задачник. Этим и вызвано появление данных методических указаний.

Книжка разбита на 2 части, в первой из которых собраны наиболее простые, но вместе с тем и наиболее употребительные свойства преобразования Лапласа, а также соответствующие задачи. Эта часть представляет собой тот минимум, знание которого безусловно требуется от каждого выпускника физического факультета и который должен быть разобран во всех группах вне зависимости от того, сколько занятий не состоялось из-за праздников.

Во второй части собраны более замысловатые свойства преобразования Лапласа. Однако, как правило, содержание параграфов 7 - 10 и соответствующие задачи удается рассмотреть на практических занятиях. Параграф 11 рекомендуется для самостоятельной работы хорошо подготовленным студентам: в нем присутствует больше физики, чем на обычном занятии по анализу.

Для удобства в конце брошюры приведена таблица преобразований Лапласа наиболее часто встречающихся функций. Задачи, на которые в тексте имеется ссылка, отмечены звездочкой - их надо решить обязательно. В остальном я рекомендую решать задачи с нечетными номерами на занятиях, с четными - дома. При этом не надо стремиться решить все задачи на данную тему - часть из них преподаватель может оставить для проведения контрольных и самостоятельных работ, зачетов и экзаменов.

При составлении настоящего пособия использованы книги: П.И.Романовский."Ряды Фурье. Теория поля. Асимптотические и специальные функции. Преобразование Лапласа"и E.Kreyszig "Advanced engeneering mathematics".

Желающим познакомиться с применениями преобразования Лапласа к различным физическим задачам можно рекомендовать книгу: Г.Арфкен."Математические методы в физике".

Часть I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ПЕРВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ I. Оригиналы и изображения

Функция $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ непрерывная всюду, кроме изолированных точек, называется <u>оригиналом</u>, если существует вещественное число a такое, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-at}\,dt$$

сходится. Точная нижняя граница всех таких a называется <u>показателем роста</u> функции f и обозначается через $a(f)$.

<u>Изображением</u> оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, определенная в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$ равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$ коротко принято записывать в виде формулы $f(t) \risingdotseq F(p)$.

<u>Преобразованием Лапласа</u> называется преобразование, сопоставляющее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$. Преобразование Лапласа обычно обозначается буквой $\mathcal{L}$, так что равенство $F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ означает, что $F(p)$ есть изображение оригинала $f(t)$.

<u>Задачи</u>

Установить, какие из функций являются оригиналами и найти их показатели роста:

I. $f(t)=e^{(2+3i)t}$ 2. $f(t)=e^{t^2}$

3. $f(t)=e^{-t^2}$ 4. $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

5. $f(t)=\frac{1}{t}$.

6. Пусть функция $f(t)$ для всех t удовлетворяет неравенству $|f(t)|\leq M e^{at}$, где $M>0$, $a\geq 0$ – постоянные. Доказать, что $f(t)$ является оригиналом.

Для следующих оригиналов $f(t)$ найти соответствующие изображения $F(p)$ и указать области определения последних:

7*. $f(t)=1$ 8*. $f(t)=e^{\alpha t}\ (\alpha\in\mathbb{C})$

9*. $f(t)=t^{\nu}\ (\nu>-1)$ 10*. $f(t)=t^{n}\ (n\in N)$

11.
$$f(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0<t<a \\ 0, & \text{если } t\geq a \end{cases} \qquad (a>0)$$

12.
$$f(t)=\begin{cases} t, & \text{если } 0\leq t\leq 1 \\ 1, & \text{если } 1\leq t\leq 2 \\ 0, & \text{если } t>2. \end{cases}$$

§ 2. Линейность преобразования Лапласа. Теорема подобия

<u>Теорема</u> (линейность преобразования Лапласа). Если $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы, то для любых комплексных чисел α и β справедливо равенство

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Доказательство. $\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(p)=$

$$=\int_0^{+\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]e^{-pt}dt=\alpha\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt+\beta\int_0^{+\infty}g(t)e^{-pt}dt=$$

$$=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(p)+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}(p).$$

Теорема (подобия). Если $f(t)$ – оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого положительного вещественного числа a

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказательство. $\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt =$ (сделаем замену переменной $u = at$) $= \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Задачи

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия, найти изображения следующих оригиналов и указать область определения изображений

13*. $f(t) = \cos \omega t \quad (\omega \in \mathbb{C})$

14*. $f(t) = \sin \omega t \quad (\omega \in \mathbb{C})$

15*. $f(t) = \operatorname{ch} \omega t \quad (\omega \in \mathbb{C})$

16*. $f(t) = \operatorname{sh} \omega t \quad (\omega \in \mathbb{C})$

17. $f(t) = t^2 - 2$

18. $f(t) = 4t^3 + t^2$

19. $f(t) = \cos^2 t$

20. $f(t) = \sin^2 2t$

21. $f(t) = 2\cos(\omega t + \alpha) \quad (\omega, \alpha \in \mathbb{C})$

22. $f(t) = \operatorname{ch}^2 \omega t \quad (\omega \in \mathbb{C})$.

§ 3. Смещение изображения

Теорема (смещения). Если $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$ при $\operatorname{Re} p > a(f) - \operatorname{Re} \alpha$.

Доказательство. При $\operatorname{Re}(p+\alpha) > a(f)$ имеем

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t)dt = F(p+\alpha).$$

Задачи

Для следующих оригиналов найти соответствующие изображения и указать области определения последних:

$23^*.\ f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t \quad (\alpha,\omega\in\mathbb{C})$ $\quad 24^*.\ f(t)=e^{\alpha t}\sin\omega t \quad (\alpha,\omega\in\mathbb{C})$

25. $f(t)=e^{-t}\cos^2 t$ $\quad$ 26. $f(t)=e^{-t}\sin t$

$27^*.\ f(t)=t^n e^{\alpha t} \quad (n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{C})$ $\quad$ 28. $f(t)=te^{\alpha t} \quad (\alpha\in\mathbb{C})$

29. $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t\cos\alpha t \quad (\alpha\in\mathbb{C})$ $\quad$ 30. $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t\sin\alpha t \quad (\alpha\in\mathbb{C})$

31. $f(t)=\operatorname{sh}\alpha t\cos\alpha t \quad (\alpha\in\mathbb{C})$ $\quad$ 32. $f(t)=\operatorname{sh}\alpha t\sin\alpha t \quad (\alpha\in\mathbb{C})$

Используя результаты задач I – 32, найти оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)$ равняется

33. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+9}$ $\quad$ 34. $F(p)=\dfrac{3}{p+2}$

35. $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+1}$ $\quad$ 36. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-4}$

37. $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p^2+2)^2+\omega^2}$ $\quad$ 38. $F(p)=\dfrac{1}{(p-3)^2}$

39. $F(p)=\dfrac{1}{(p-a)(p-b)} \quad (a\neq b)$ $\quad$ 40. $F(p)=\dfrac{a_1}{p}+\dfrac{a_2}{p^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{p^n}$.

§ 4. Преобразование Лапласа производных и интегралов

Теорема (о дифференцировании оригинала). Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t\geqslant 0$ и дифференцируема при $t>0$, причем $f'(t)$ является оригиналом. Тогда $f(t)$ – тоже оригинал и $\mathcal{L}\{f'\}(p)=p\mathcal{L}\{f\}(p)-f(0)$.

Доказательство. Убедимся сначала, что $f(t)$ является оригиналом. Зафиксируем число a так, чтобы $a>a(f')$ и $a>0$ и подберем $\varepsilon>0$, для которого $a-\varepsilon>a(f')$. Тогда, не останавливаясь на законности изменения порядка интегрирования, будем иметь

$$\int_0^{+\infty}|f(t)|e^{-at}dt=\int_0^{+\infty}\left|\int_0^t f'(u)\,du+f(0)\right|e^{-at}dt \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} dt \int_0^t |f'(u)|\, e^{-at} du + |f(0)| \int_0^{+\infty} e^{-at} dt =$$

$$= \int_0^t |f'(u)|\, e^{-(a-\varepsilon)u} du \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} dt + \frac{|f(0)|}{a} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} |f'(u)|\, e^{-(a-\varepsilon)u} du + \frac{|f(0)|}{a} < +\infty .$$

Следовательно, $f(t)$ – оригинал, причем $a(f) \leq a(f')$.

Проверим теперь, что $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, если $f(t) \risingdotseq F(p)$. В самом деле, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} f(t) e^{-pt} - f(0) + pF(p)$$

и нам остается проверить, что первый член в последнем выражении равен нулю:

$$\left| \lim_{t \to +\infty} f(t) e^{-pt} \right| = \lim_{t \to +\infty} e^{-pt} \left| \int_0^t f'(u) du + f(0) \right| \leq$$

$$\leq \lim_{t \to +\infty} \left[e^{-\varepsilon t} \int_0^{+\infty} |f'(u)|\, e^{-(p-\varepsilon)u} du + e^{-pt} |f(0)| \right] = 0 .$$

В последнем неравенстве число $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы имело место неравенство $\mathrm{Re}(p-\varepsilon) > a(f')$.

<u>Следствие</u>. Если функция $f(t)$ имеет n непрерывных производных, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Доказательство. Применяя теорему о дифференцировании оригинала к функции $f'(t)$ вместо $f(t)$, получим

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(p) = p\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) - f'(0) = p^2\mathcal{L}\{f(t)\}(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогично $\mathcal{L}\{f'''(t)\}(p) = p^3\mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$, откуда ясно, как получить общую формулу с помощью индукции.

Теорема (об интегрировании оригинала). Если $f(t)$ – оригинал, непрерывный на $[0, +\infty)$, и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(u)\,du \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Положим $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Тогда в силу теоремы о дифференцировании оригинала

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{g'(t)\}(p) =$$

$$= p\mathcal{L}\{g(t)\}(p) - g(0) = p\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}.$$

Пример. Найдем $f(t)$, если известно, что $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = p^{-2}(p^2+\omega^2)^{-1}$. Из решения задачи 14 мы знаем, что $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\omega^2}\right\} = \omega^{-1}\sin\omega t$. Поэтому теорема об интегрировании оригинала дает

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega t\,dt = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

Вновь применяя теорему об интегрировании оригинала, получаем искомый результат

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

Задачи

Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях, считая, что к функции $f(t)$ применима теорема о дифференцировании оригинала и ее следствие

41. $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) + 1$ при условиях $f(0) = -1,\ f'(0) = -2$

42. $f^{(4)}(t)+4f'''(t)+2f''(t)-3f'(t)-5$ при условиях $f(0)=1,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=-3,\ f'''(0)=5$.

43. $f''(t)+5f'(t)-7f'(t)+2$ при условиях $f(0)=1$, $f'(0)=0$.

44. $f''(t)+4f'(t)+4f(t)$ при условиях $f(0)=2$, $f'(0)=-3$.

Используя теорему об интегрировании оригинала, найти $f(t)$, если его изображение $F(p)$ равняется

45. $F(p)=\frac{1}{p(p-2)}$

46. $F(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}$

47. $F(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}$

48. $F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}$

49. $F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p-1}{p+1}$

50. $F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p-2}{p^2+4}$

51. $F(p)=\frac{54}{p^3(p-3)}$

52. $F(p)=\frac{2p-\pi}{p^3(p-\pi)}$.

Применяя различные приемы, найти оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)$ равняется

53. $F(p)=\frac{c}{(p^2-1)(p^2-4)}$

54. $F(p)=\frac{p^2+9p-9}{p^3-9p}$

55. $F(p)=\frac{11p-14}{p^3-p^2-4p+4}$

56. $F(p)=\frac{4-2p}{p^3+4p}$

57. $F(p)=\frac{p^3+6p^2+14p}{(p+2)^4}$

58. $F(p)=\frac{3(p^3-p+3)}{(p-1)^2(p+2)^2}$

59. $F(p)=\frac{1-p}{(p^2-2p+2)^2}$

60. $F(p)=\frac{p^2+2p}{(p^2+2p+2)^2}$.

Найти изображения следующих интегралов:

61. $\int\limits_0^t (u-\cos u)\,du$

62. $\int\limits_0^t e^{-u}u^3\,du$

63. $si(t)=-\int\limits_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ (интегральный синус; $t\geq 0$)

64. $ci(t)=-\int\limits_t^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ (интегральный косинус; $t>0$)

65. $Ei(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^u}{u}du$ (интегральная показательная функция; $t<0$)

66. $li(t)=\int\limits_{0}^{t}\frac{du}{\ln u}$ (интегральный логарифм; $0<t<1$)

§ 5. Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема (о дифференцировании изображения). Если функции $f(t)$ и $tf(t)$ являются оригиналами и $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $F'(p)\risingdotseq -tf(t)$.

Доказательство.

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_{0}^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=-\int\limits_{0}^{+\infty}tf(t)e^{-pt}dt=-\mathcal{L}\{tf(t)\}(p).$$

Второе равенство здесь получено в результате дифференцирования под знаком интеграла. Эта операция законна, поскольку мы предполагаем, что функция $tf(t)$ является оригиналом, а значит – интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}tf(t)e^{-pt}dt$ сходится равномерно относительно p.

Следствие. Если функции $f(t)$ и $t^n f(t)$ являются оригиналами и $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $F^{(n)}(p)\risingdotseq(-1)^n t^n f(t)$.

Доказательство проводится повторным применением предыдущей теоремы:

$$F^{(n)}(p)=\frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\mathcal{L}\{-tf(t)\}=$$

$$=\ldots=\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{(-t)^{n-1}f(t)\}=\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}.$$

Теорема (об интегрировании изображения). Если функции $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ являются оригиналами и $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t}\risingdotseq\int\limits_{p}^{+\infty}F(q)dq.$$

Доказательство. Положим $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ и воспользуемся теоремой о дифференцировании изображения

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t g(t)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(p) = \int\limits_p^{+\infty} F(q)\,dq.$$

Задачи

Используя теорему о дифференцировании изображения, найти изображения следующих оригиналов:

67*. $f(t) = t\cos\omega t \quad (\omega\in\mathbb{C})$ 68*. $f(t) = t\sin\omega t \quad (\omega\in\mathbb{C})$

69. $f(t) = t^2\cos t$ 70. $f(t) = t^3\sin 2t$

71. $f(t) = t^n e^{\omega t} \quad (n\in\mathbb{N}, \omega\in\mathbb{C})$ 72. $f(t) = t^2\,\mathrm{ch}\,\omega t \quad (\omega\in\mathbb{C})$

73. $f(t) = te^{-t}\cos t$ 74. $f(t) = te^{-t}\,\mathrm{ch}\,2t.$

Используя задачи 67 и 68, доказать формулы

75*. $$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\right\} = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$$

76. $$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)\right\} = \frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

Пользуясь теоремой об интегрировании изображения, доказать формулы

77. $$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\frac{p+b}{p+a} \qquad (a, b\in\mathbb{R})$$

78. $$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\} = \mathrm{arcctg}\,\frac{p}{\omega} \qquad (\omega\in\mathbb{C})$$

Пользуясь теоремой об интегрировании изображения, найти оригиналы по изображениям

79. $F(p)=\dfrac{1}{(p-4)^2}$ 80. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$

81. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p-1)^2}$ 82. $F(p)=\operatorname{arcctg}(p+1)$.

Найти изображения оригиналов

83. $f(t)=\dfrac{\cos t-1}{t}$ 84. $f(t)=e^{-at}\dfrac{\sin t}{t}$.

§ 6. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=f(t)$$

состоит в отыскании решения $y=y(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(0)=c_0,\ y'(0)=c_1,\ldots,\ y^{(n-1)}(0)=c_{n-1}.$$

Предположим, что $y^{(n)}(t)$ и $f(t)$ – оригиналы. Тогда в силу следствия из теоремы о дифференцировании оригинала, $y(t)$ – тоже оригинал. Введем обозначения $y(t)\doteqdot Y(p)$ и $f(t)\doteqdot F(p)$. Применим к исходному уравнению преобразование Лапласа, воспользовавшись следствием из теоремы о дифференцировании оригинала:

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)Y(p)-c_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1})-$$
$$-c_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})-\ldots-c_{n-2}(a_0p+a_1)-$$
$$-c_{n-1}a_0=F(p).$$

Значит

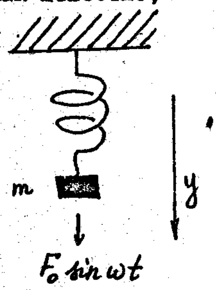
$$Y(p) = \frac{F(p) + c_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \ldots + c_{n-1} a_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

и для завершения решения задачи Коши остается перейти к оригиналу

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}.$$

Таким образом, решение задачи Коши осуществляется по следующей схеме. К исходному дифференциальному уравнению надо применить преобразование Лапласа. Любопытно заметить, что в получающееся алгебраическое уравнение в качестве коэффициентов войдут начальные условия задачи Коши. Затем нужно решить алгебраическое уравнение и с помощью обратного преобразования Лапласа найти решение задачи Коши.

Пример (вынужденные колебания, резонанс). Решить начальную задачу $my'' + ky = F_0 \sin \omega t$, $y(0) = y'(0) = 0$. Как известно, это уравнение описывает вынужденные колебания тела массы m, прикрепленного к нижнему концу пружины, верхний конец которой закреплен. Здесь k – модуль пружины, $F_0 \sin \omega t$ – внешняя вынуждающая сила. Полагая $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $K = F_0/m$ мы можем переписать уравнение в виде



$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega t.$$

Применив к нему преобразование Лапласа и использовав начальные условия, получим алгебраическое уравнение

$$p^2 Y + \omega_0^2 Y = K \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Далее порознь рассмотрим две возможности.

Отсутствие резонанса: $\omega^2 \neq \omega_0^2$. В этом случае решение алгебраического уравнения разлагается на простые дроби следующим образом

$$Y(p) = \frac{K\omega}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Ap + B}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{Mp + N}{p^2 + \omega^2}.$$

Вычисления дают

$$A = M = 0\ ,\ B = -N = -\frac{K\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\ .$$

Значит

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}(t) =$$

$$= \frac{K}{\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2)}\left(\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t\right).$$

<u>Резонанс:</u> $\omega^2 = \omega_0^2$. В этом случае

$$Y(p) = \frac{K\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$$

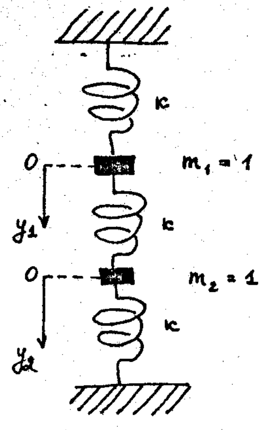
и, согласно задаче 75,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}(t) = \frac{K}{2\omega_0^2}\left(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t\right).$$

<u>Замечание</u>. Любопытно проверить, что при $\omega \to \omega_0$ нерезонансное решение стремится к резонансному.

Преобразование Лапласа может быть применено к решению не только дифференциальных уравнений, но и систем дифференциальных уравнений. Единственное отличие состоит в том, что применив преобразование Лапласа, мы получим не алгебраическое уравнение, а систему алгебраических уравнений. Поясним это следующим примером.

<u>Пример</u> (колебания двух масс). Колебания механической системы из двух масс, изображенной на рисунке, описываются системой дифференциальных уравнений



$$\begin{cases} y_1'' = -k y_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' = -k(y_2 - y_1) - k y_2 \end{cases}.$$

где k – модуль каждой из трех пружин, y_1, y_2 – отклонения масс от положения равновесия. Массами пружин и затуханием пренебрегаем.

Будем искать решение, соответствующее начальным условиям: $y_1(0)=y_2(0)=1$; $y_1'(0)=-y_2'(0)=\sqrt{3k}$.

Введем обозначения $Y_1=\mathcal{L}\{y_1\}$, $Y_2=\mathcal{L}\{y_2\}$ и применим преобразование Лапласа к каждому из уравнений решаемой системы. Получим

$$\begin{cases} p^2Y_1-p-\sqrt{3k} = -kY_1+k(Y_2-Y_1) \\ p^2Y_2-p+\sqrt{3k} = -k(Y_2-Y_1)-kY_2 \end{cases}$$

Эта система линейных алгебраических уравнений с неизвестными Y_1 и Y_2 может быть переписана в виде

$$\begin{cases} (p^2+k)Y_1 - kY_2 = p+\sqrt{3k} \\ -kY_1 + (p^2+k)Y_2 = p-\sqrt{3k}. \end{cases}$$

Решая ее по правилу Крамера, найдем

$$Y_1 = \frac{(p+\sqrt{3k})(p^2+2k)+k(p-\sqrt{3k})}{(p^2+2k)^2-k^2}$$

$$Y_2 = \frac{(p-\sqrt{3k})(p^2+2k)+k(p+\sqrt{3k})}{(p^2+2k)^2-k^2}.$$

Опуская вычисления, укажем представление найденных решений в виде правильных дробей:

$$Y_1 = \frac{p}{p^2+k} + \frac{\sqrt{3k}}{p^2+3k}$$

$$Y_2 = \frac{p}{p^2+k} - \frac{\sqrt{3k}}{p^2+3k}.$$

Отсюда находим решение исходной задачи Коши:

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_1\} = \cos\sqrt{k}\,t + \sin\sqrt{3k}\,t$$

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_2\} = \cos\sqrt{k}\,t - \sin\sqrt{3k}\,t.$$

Задачи

Используя преобразование Лапласа, решить следующие начальные задачи:

85. $y'' - y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

86. $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t},\ y(0) = y'(0) = 3$

87. $y'' + 2y' - 3y = 10\,\mathrm{sh}\,2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$

88. $y'' + 2y' + 2y = 10\sin 2t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -3$

89. $y'' - 2y' + 5y = 8\sin t - 4\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

90. $y'' + 4y = 4(\cos 2t - \sin 2t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

91. $y''' - y'' - 6y' = 0,\ y(0) = 15,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 56$

92. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 1,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 4$

93. $y^{(4)} + y^{(3)} = e^{t},\ y(0) = -1,\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

94. $y^{(4)} - y^{(3)} = \cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

95. $\begin{cases} y_1' + 4y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_2' + 2y_1 + 6y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 15$

96. $\begin{cases} y_1' + 3y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = y_2(0) = 1$

97. $\begin{cases} y_1'' + 3y_2'' - y_1 = 0 \\ y_1' + 3y_2' - 2y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = -2/3$

98. $\begin{cases} y_1'' + y_2' + y_1 = e^{t} \\ y_1' + y_2'' = 1 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = -1,\ y_2'(0) = 2$

99. $\begin{cases} y_1' = y_2 - y_3 \\ y_2' = y_3 - 2y_1 \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = y_3(0) = 0$

100. $\begin{cases} y_1'' - y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2'' + y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3'' + y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = y_3(0) = 0,\ y_1'(0) = y_2'(0) = y_3'(0) = 0.$

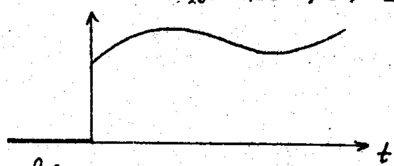
Часть II

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

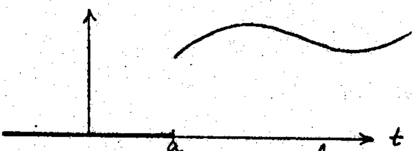
§ 7. Запаздывание оригинала

По своему определению, оригинал – это функция на полупрямой $[0, +\infty)$. Будем считать, что она определена на всей прямой $(-\infty, +\infty)$, но равна нулю при отрицательных значениях аргумента.

Тогда, если $a > 0$ и функция $f(t)$ имеет график



то функция $f(t-a)$ имеет график



Чтобы подчеркнуть, что функция $f(t-a)$ зануляется при $t < a$, введем в рассмотрение ступенчатую функцию

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } & t \le a \\ 1, \text{ если } & t > a \end{cases}$$

и будем записывать функцию $f(t-a)$ в виде $f(t-a)H_a(t)$.

Теорема (о запаздывании оригинала). Если f – оригинал и a – положительное вещественное число, то

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H_a(t)\}(p) = e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t)\}(p).$$

Доказательство. $\mathcal{L}\{f(t-a)H_a(t)\}(p) =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a) H_a(t)\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\,dt =$$

$$= (\text{замена } t-a = z) = e^{-pa}\int_0^{+\infty} e^{-pz} f(z)\,dz = e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t)\}(p).$$

Задачи

Нарисовать графики следующих оригиналов и найти их изображения

101. $f(t)=(t-1)\,H_1(t)$ 102. $f(t)=t\,H_1(t)$

103. $f(t)=e^{t}H_1(t)$ 104. $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{\pi}{2}}(t)$.

105. $f(t)=\sin t\,H_{2\pi}(t)$ 106. $f(t)=H_a(t)\sin^2(t-a)$.

Найти обратное преобразование Лапласа следующих функций:

107. $F(p)=e^{-2p}/p$ 108. $F(p)=e^{-p}/p^3$

109. $F(p)=e^{-p}/(p^2+\pi^2)$ 110. $F(p)=\left(1-e^{-\pi p}\right)/(p^2+4)$.

§ 8. Свертка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений

Сверткой оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называют функцию, обозначаемую $(f_1*f_2)(t)$ и определяемую равенством

$$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)\,du.$$

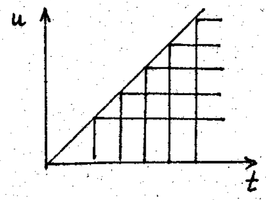
Теорема (Бореля об умножении изображений). Произведение изображений является изображением свертки их оригиналов, т.е.

$$\mathcal{L}\{f_1*f_2\}=\mathcal{L}\{f_1\}\cdot\mathcal{L}\{f_2\}.$$

Доказательство. $\mathcal{L}\{(f_1*f_2)(t)\}(p)=$

$$=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(u)\,f_2(t-u)du\right\}(p)=\int_0^{+\infty}\left[e^{-pt}\int_0^t f_1(u)\,f_2(t-u)du\right]dt=$$

= (изменим порядок интегрирования) =



$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_u^{+\infty}e^{-pt}f_1(u)f_2(t-u)dt\right]du=$$

= (замена $t-u=v$) =

$$= \int_0^{+\infty} f_1(u) e^{-pu} \left[\int_0^{+\infty} e^{-pv} f_2(v)\, dv \right] du =$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} f_1(u) e^{-pu} du \right] \cdot \left[\int_0^{+\infty} f_2(v) e^{-pv} dv \right] = \mathcal{L}\{f_1\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(p).$$

Задачи

Найти свертки заданных оригиналов и изображения сверток:

III. $f_1(t) = t$; $f_2(t) = \cos t$

II2. $f_1(t) = t$; $f_2(t) = e^{t}$

II3. $f_1(t) = \cos t$; $f_2(t) = \sin t$

II4. $f_1(t) = e^{t}$; $f_2(t) = e^{-t}$.

Применяя теорему Бореля об умножении изображений, найти оригиналы по их изображениям:

II5. $F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ $\quad (a \neq b;\ a, b \in R)$

II6. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$

II7. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ $\qquad$ II8. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

§ 9. Формула Дюамеля

Теорема (формула Дюамеля). Если на интервале $[0, +\infty)$ оригинал $f_1(t)$ непрерывен, а оригинал $f_2(t)$ непрерывно дифференцируем, то

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)\right\}(p) = p\, \mathcal{L}\{f_1\}\, \mathcal{L}\{f_2\}.$$

В развернутом виде это равенство записывается так:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(u)\,f_2(t-u)\,du\right\} = p\,F_1(p)\,F_2(p)$$

или

$$\mathcal{L}^{-1}\{p\,F_1(p)\,F_2(p)\} = \int_0^t f_1(u)\,f_2'(t-u)\,du + f_1(t)\,f_2(0),$$

где для краткости использованы обозначения $F_1(p)=\mathcal{L}\{f_1\}(p)$, $F_2(p)=\mathcal{L}\{f_2\}(p)$.

Доказательство.

$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f_1*f_2)\right\} = p\,\mathcal{L}\{f_1*f_2\} = p\,\mathcal{L}\{f_1\}\cdot\mathcal{L}\{f_2\}$. Здесь первое равенство имеет место в силу теоремы о дифференцировании оригинала, второе – в силу теоремы Бореля об умножении изображений.

Применяя к доказанному равенству обратное преобразование Лапласа и пользуясь следующей, известной из Фихтенгольца, формулой дифференцирования интеграла, зависящего от параметра

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y)\,f(\beta(y),y) - \alpha'(y)\,f(\alpha(y),y),$$

получим

$$\mathcal{L}^{-1}\{p\,F_1(p)\,F_2(p)\} = \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(u)\,f_2(t-u)\,du =$$

$$= \int_0^t f_1(u)\,f_2'(t-u)\,du + f_1(t)\,f_2(0).$$

Задачи

Применяя формулу Дюамеля, найти оригиналы по их изображениям:

119. $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$ 120. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$

121. $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$ 122. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p^2+2)}$

§ 10. Аналитичность изображения. Формула обращения

Напомним, что через $a(f)$ мы обозначаем показатель роста функции f.

Следующее утверждение мы приводим без доказательства.

Теорема (об аналитичности изображения). Изображение $F(p)$ является аналитической функцией комплексного переменного p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$, причем $F(p)\to 0$, когда $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Теорема (формула обращения). Если $f(t)$ – кусочно-гладкий непрерывный оригинал, то для каждого $a > a(f)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,$$

где интегрирование выполняется в комплексной плоскости по прямой $\{x+iy\in\mathbb{C} : x=a\}$.

Доказательство. Если $a>a(f)$, то, положив $p=a+i\lambda$, будем иметь

$$F(p)=F(a+i\lambda)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-at}e^{-i\lambda t}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где введено обозначение

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-at}, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Значит, F является преобразован: м Фурье от функции $f_1(t)$. По формуле обращения для преобразования Фурье, которую мы в свое время доказали для кусочно-гладких непрерывных функций, имеем для всех $t > 0$

$$e^{-at}f(t) = f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} F(a+i\lambda)\,d\lambda.$$

Таким образом, переходя от интегрирования по λ к интегрированию по p с помощью формулы $a+i\lambda = p$, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+i\lambda)t} F(a+i\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,$$

что и требовалось доказать

§ II. Применение преобразования Лапласа в теории электрических цепей

Изложим необходимые нам сведения из теорий электрических цепей.

Падение напряжения E_R на сопротивлении пропорционально проходимому току: $E_R = R\cdot I$ (закон Ома). При этом постоянная R называется сопротивлением резистора и измеряется в омах.

Падение напряжения E_L на катушке индуктивности пропорционально скорости изменения проходимого тока I : $E_L = L\cdot\frac{dI}{dt}$. Постоянная L называется индуктивностью катушки и измеряется в генри.

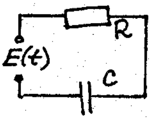
Падение напряжения на конденсаторе E_C пропорционально текущему заряду Q конденсатора: $E_C = \frac{1}{C}Q$. При этом постоянная C называется емкостью конденсатора и измеряется в фарадах. Поскольку $I(t) = \frac{dQ}{dt}$, то последний закон может быть переписан в виде

$$E_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(u)\,du.$$

Второй закон Кирхгофа гласит: Алгебраическая сумма всех текущих падений напряжения при обходе вокруг произвольной замкнутой цепи равна нулю или: Напряжение, подводимое к замкнутой цепи, равно сумме падений напряжений на составляющих цепи.

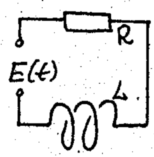
Приведенные законы позволяют составлять уравнения простейших цепей:

RC -контур



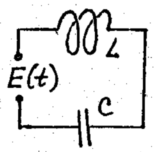
$$RI + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(u)\,du = E(t)$$

RL -контур



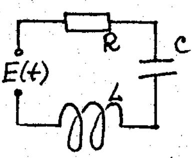
$$RI + L\frac{dI}{dt} = E(t)$$

LC -контур



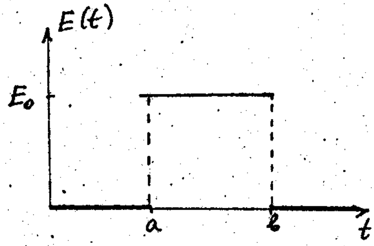
$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(u)\,du = E(t)$$

RLC-контур



$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(u)\,du = E(t).$$

Пример (отклик RC -контура на единичную прямоугольную волну). Найдем ток $I(t)$, протекающий по RC -контуру, если единичная прямоугольная волна амплитуды E_0 приходит на вход.



Предполагается, что до прихода волны ток в контуре отсутствовал.

Уравнение контура таково:

$$RI(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(u)\,du = E(t),$$

где функция $E(t)$ может быть представлена в терминах двух ступенчатых функций (см. § 7):

$$E(t)= E_0\left(H_a(t)-H_b(t)\right).$$

Используя теорему об интегрировании оригинала и формулу $\mathcal{L}\{H_a(t)\}=e^{-ap}/p$, получим, как и в § 6, вспомогательное алгебраическое уравнение

$$R\mathcal{L}\{I\}+\frac{1}{Cp}\mathcal{L}\{I\}=\frac{E_0}{p}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\{I\}=\frac{E_0/R}{p+1/RC}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right).$$

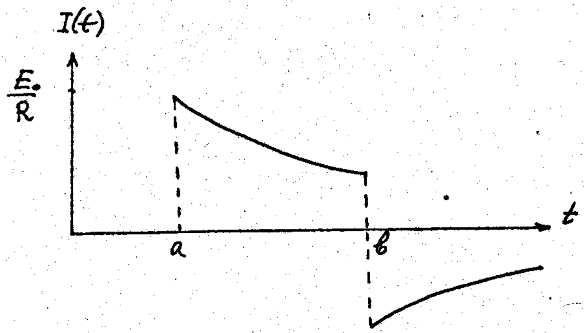
Согласно задаче 8, $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=1/p-\alpha$, а значит $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{E_0/R}{p+1/RC}\right\}=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$. Поэтому, применив теорему о запаздывании оригинала, получим

$$I(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{I\}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\frac{E_0/R}{p+1/RC}-e^{-bp}\frac{E_0/R}{p+1/RC}\right\}=$$

$$=\frac{E_0}{R}\left[e^{-(t-a)/RC}H_a(t)-e^{-(t-b)/RC}H_b(t)\right],\quad \text{т.е.}$$

$$I(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t<a\\ K_1e^{-t/RC}, & \text{при } a<t<b;\ \text{где } K_1=\frac{E_0}{R}e^{a/RC}\\ (K_1-K_2)e^{-t/RC}, & \text{при } t>b;\ \text{где } K_2=\frac{E_0}{R}e^{b/RC}.\end{cases}$$

График решения изображен на рисунке.



Задачи

123. Найти отклик RC -контура на треугольный импульс

$$E(t) = \begin{cases} t, & \text{при} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{при} \quad t > 1 \end{cases}$$

предполагая, что при $t = 0$ ток в контуре не течет.

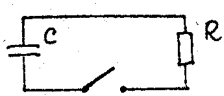
124. Решить задачу 123, когда

$$E(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & \text{при} \quad 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \text{при} \quad t > \pi/\omega . \end{cases}$$

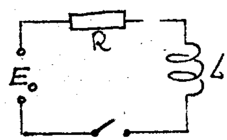
125. Найти значение тока $I(t)$ в RL -контуре, если $I(0) = 0$, а напряжение на входе имеет вид

$$E(t) = \begin{cases} t, & \text{при} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{при} \quad t > 1 . \end{cases}$$

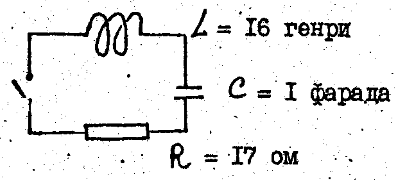
126. Конденсатор емкости C заряжен так, что его потенциал равен E_0. При $t = 0$ выключатель в схеме, изображенной на рисунке, замыкается и конденсатор начинает разряжаться через резистор с сопротивлением R. Найти заряд $Q(t)$ конденсатора.



127. Найти ток в цепи, изображенной на рисунке, предполагая, что на вход подается постоянное напряжение E_0, что при $t \le 0$ ток не течет, а выключатель замыкается при $t = 0$.



128. Конденсатор емкостью I фарада заряжен до напряжения E_0 = 100 вольт. В момент времени $t=0$ выключатель на рисунке замыкается. Найти ток в цепи и заряд конденсатора.

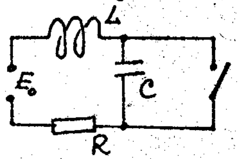


129. Найти установившееся значение тока для RL-контура при следующем напряжении:

$$E(t)=\begin{cases} 1, \text{ при } & 0<t<a \\ 0, \text{ при } & a<t<2a, \end{cases} \qquad E(t+2a)=E(t).$$

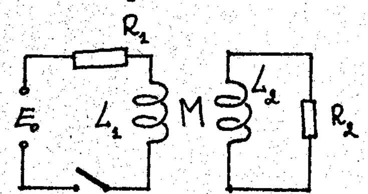
130. Решить задачу 129, если $E(t)=t$ при $0<t<1$, $E(t+1)=E(t)$.

131. Пусть в цепи



где L = 5 генри, C = 1 фарада, R = = 2 ома, E_0 = 4 вольта, а выключатель замкнут, течет установившийся ток. При $t=0$ выключатель размыкается. Найти ток $I(t)$.

132. Контуры на рисунке связаны между собой с коэффициентом индукции M. При $t=0$ токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ равны 0. Используя второй закон Кирхгофа, показать, что дифференциальные уравнения для токов таковы:



$$\begin{cases} L_1 I_1' + R_1 I_1 = M I_2' + E_0 H_0 \\ L_2 I_2' + R_2 I_2 = M I_1' \end{cases}$$

где H_0 – ступенчатая функция (см. § 7). Показать, что вспомогательные алгебраические уравнения таковы:

$$L_1 p \mathcal{L}\{I_1\} + R_1 \mathcal{L}\{I_1\} = M p \mathcal{L}\{I_2\} + E_0/p$$

$$L_2 p \mathcal{L}\{I_2\} + R_2 \mathcal{L}\{I_2\} = M p \mathcal{L}\{I_1\}$$

Предполагая, что $A \equiv L_1 L_2 - M^2 > 0$, показать, что выражение для $\mathcal{L}\{I_2\}$, полученное в результате решения вспомогательных уравнений может быть записано в виде

$$\mathcal{L}\{I_2\} = K/((p+\alpha)^2+\omega^2),$$

где $K = A^{-1}E_0M$, $\alpha = (2A)^{-1}(R_1L_2+R_2L_1)$, $\omega^2 = A^{-1}R_1R_2-\alpha^2$.
Наконец, доказать, что когда $A = 0$, то $I_2(t) = K_0e^{-at}$,
где $K_0 = BE_0M$, $a = BR_1R_2$, $B = (R_1L_2+R_2L_1)^{-1}$.

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Оригинал	Изображение	Область определения изображения	Номер задачи
1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$	7
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$	8
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$	I0
$t^\nu,\ \nu > -1$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, где нужно брать ту ветвь функции $p^{\nu+1}$, которая положительна для положительных p	$\operatorname{Re} p > 0$	9
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$	I4
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		I3
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} \omega \rvert$	I6
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$		I5
$t^n e^{\alpha t},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$	27
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha + \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$	24
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$		23
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$	68
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$		67

Содержание

Предисловие 3

Часть I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ПЕРВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ I. Оригиналы и изображения 5
§ 2. Линейность преобразования Лапласа. Теорема подобия 6
§ 3. Смещение изображения 7
§ 4. Преобразование Лапласа производных и интегралов ... 8
§ 5. Дифференцирование и интегрирование изображений I2
§ 6. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений I4

Часть II. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 7. Запаздывание оригинала I9
§ 8. Свертка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений 20
§ 9. Формула Дюамеля 2I
§ I0. Аналитичность изображения. Формула обращения 23
§ II. Применение преобразования Лапласа в теории электрических цепей 24

Таблица преобразований Лапласа 30

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Методические указания

Составитель В.А.Александров

Подписано в печать 25.02.92		Формат 60x84, I/I6
Офсетная печать	Уч.-изд.л. 2	Усл.печ.л. I,86
Тираж 250 экз.	Заказ № 120	Цена 2 р.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета; участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.