МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики физического факультета

С. Г. Бугаева, А. А. Егоров

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА: ТЕОРЕМЫ, ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

(Учебное пособие)

Новосибирск
2011

В пособии излагаются теоремы и основные методы решения задач по теме Преобразование Лапласа курса Теории функций комплексного переменного, читаемого в качестве основного курса на физическом факультете НГУ в соответствии с учебным планом. Пособие содержит теоретический материал с подробными доказательствами, примеры решения типовых задач и задачи, используемые на практических занятиях.

Авторы: С. Г. Бугаева, А. А. Егоров

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации «Программы развития НИУ — НГУ на 2009–2018 годы», а также при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–13 годы (гос. контракт 02.740.11.0457) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ–6613.2010.1).

Введение

Курс «Теория функций комплексного переменного», читаемый на физическом факультете Новосибирского государственного университета для студентов 2-го года обучения, содержит тему «Преобразование Лапласа». Эта тема важна сама по себе, так как дает альтернативные, часто более экономичные, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, а также интегральных уравнений Вольтерра. Дополнительный интерес представляет применение преобразования Лапласа к решению прикладных задач. Однако, в силу того, что курс «Теории функций комплексного переменного» является весьма насыщенным, на эту тему отводятся всего две лекции и два семинара. За это время можно успеть изложить только основы и научить студентов решать весьма узкий круг задач, тогда как зачастую в физических курсах, излагаемых в дальнейшем, студентам требуется гораздо большее разнообразие приемов для решения возникающих задач.

Поэтому учебное пособие содержит также темы, не включаемые обычно в стандартный курс, но представляющие интерес для студентов. Например, применение преобразования Лапласа к решению обыкновенных уравнений и систем с разрывной правой частью. Такие уравнения не рассматриваются в классическом курсе дифференциальных уравнений, читаемом на физическом факультете, но часто появляются в приложениях. Также решение уравнений с частными производными, которые впервые появляются в курсе дифференциальных уравнений в конце 4-го семестра и подробно изучаются затем в 5-6-х семестрах в курсе «Методы математической физики». Поэтому говорить о них в 3-м семестре, когда читается курс «Теория функций комплексного переменного», представляется преждевременным, в то время как и умолчать о таком важном методе их решения как преобразование Лапласа, было бы неправильным.

В учебном пособии приведены также начальные сведения о преобразовании Лапласа обобщенных функций, тем самым проводятся параллели с преобразованием Фурье обобщенных функций, рассматриваемым в курсе «Основы функционального анализа» (3-й семестр).

В этом учебном пособии сделана попытка совместить достаточную математическую строгость теоретических рассуждений, интересную пытливому студенту, с большим количеством примеров, демонстрирующих разнообразные приемы в решении задач и призванных облегчить практическое освоение материала, самостоятельное при необходимости. Этому же служит и немалое число задач, собранных из разных источников и позволяющих закрепить приобретенные навыки.

Несколько избыточное количество задач по многим темам — это свидетельство разнообразия применений, а не руководство к действию.

1 Оригинал и изображение

Локально интегрируемая функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ называется *оригиналом*, если существует вещественное число a такое, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\,dt$ сходится. Точная нижняя граница всех таких чисел a называется *показателем роста* оригинала f и обозначается $a(f)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называют функцию $F(p)$, определённую в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$ равенством $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$.

Связь между изображением и соответствующим оригиналом будем обозначать так: $f(t) \doteqdot F(p)$.

Преобразованием Лапласа называется преобразование, сопоставляющее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$. Преобразование Лапласа обычно обозначается символом $\mathcal{L}$, и равенство $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$ означает, что $F(p)$ есть изображение оригинала $f(t)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Ясно, что она является оригиналом.

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

причём последнее равенство верно, если $e^{-pt} \to 0$ при $t \to +\infty$. Если $p = \sigma + is$, то $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t} \to 0$ при $t \to +\infty$, если $\sigma > 0$. Таким образом, интеграл сходится при $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$ и $H(t) \doteqdot \frac{1}{p}$.

Замечание 1. Условимся в дальнейшем считать, что все рассматриваемые в этом пособии функции равны нулю при $t < 0$. Например, если написано 1, t, $\sin t$, то будем подразумевать $H(t)$, $tH(t)$, $H(t)\sin t$.

Задачи

Установить, какие из функций являются оригиналами и найти их показатели роста:

1. $f(t) = e^{(2+3i)t}$.

2. $f(t) = e^{t^2}$.

3. $f(t) = e^{-t^2}$.

4. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

5. $f(t) = \frac{1}{t}$.

6. Пусть функция $f(t)$ для всех $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству $|f(t)| \leq Me^{at}$, где $M > 0$, $a \geq 0$ — постоянные. Доказать, что $f(t)$ является оригиналом.

Для следующих оригиналов $f(t)$ найти соответствующие изображения $F(p)$ и указать области определения последних.

7. $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

8. $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

9. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$.

10. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < a, \\ 0, & \text{если } t \geq a, \end{cases} \qquad a > 0.$

11. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{если } t > 2. \end{cases}$

2 Аналитичность изображения

Имеет место следущая

Теорема 1. *Пусть f — оригинал, $a(f)$ — его показатель роста. Тогда*
1) *интеграл* $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ *абсолютно сходится для любого* $p \in \mathbb{C}$ *такого, что* $\operatorname{Re} p > a(f)$;
2) *изображение* $F(p)$ *аналитично в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > a(f)$;
3) *изображение* $F(p) \to 0$ *при* $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Доказательство. Доказательство опирается на теорему об аналитической зависимости интеграла от параметра и теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Напомним теорему об аналитической зависимости интеграла от параметра.

Теорема 2 (об аналитической зависимости интеграла от параметра)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $\Delta \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f(z,t)\colon D \times \Delta \to \mathbb{C}$ — функция такая, что*
1) $f(z,t)$ — измеримая по $t \in \Delta$ для $\forall z \in D$;
2) $f(z,t)$ — аналитическая по z в области D для $\forall t \in \Delta$;
3) существует интегрируемая мажоранта $\varphi(t)$, т. е. $|f(z,t)| \le \varphi(t)$ для $\forall z \in D$ и $\int\limits_{\Delta} \varphi(t)\,dt < \infty$.
Тогда функция $F(z) = \int\limits_{\Delta} f(z,t)\,dt$ аналитична в D и $F'(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\,dt$.

Приступим к доказательству.

Фиксируем постоянную $a > a(f)$. Рассмотрим $p \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Re} p > a > a(f)$, где a — некоторая постоянная. В силу оценки

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt} \le |f(t)|e^{-at}$$

в качестве интегрируемой мажоранты можно взять функцию $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ сходится абсолютно, а по теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра $F(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > a$. В силу произвольности $a > a(f)$ оба утверждения верны и при $\operatorname{Re} p > a(f)$.

Тем самым доказаны первые два утверждения теоремы. Перейдем к доказательству последнего утверждения.

Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла существует $\delta > 0$ такое, что $\int\limits_0^{\delta} |f(t)|e^{-at}\,dt < \varepsilon$. Выпишем оценку:

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^\delta f(t)e^{-pt}\,dt + \int\limits_\delta^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right|$$

$$\le \int\limits_0^\delta |f(t)|e^{-\operatorname{Re}pt}\,dt + \int\limits_\delta^{+\infty} |f(t)|e^{-at}e^{(a-\operatorname{Re}p)t}\,dt$$

$$\le \int\limits_0^\delta |f(t)|e^{-at}\,dt + e^{(a-\operatorname{Re}p)\delta}\int\limits_\delta^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\,dt$$

$$\le \int\limits_0^\delta |f(t)|e^{-at}\,dt + e^{(a-\operatorname{Re}p)\delta}\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\,dt < \varepsilon + e^{(a-\operatorname{Re}p)\delta}M.$$

В силу выбора p величина $a - \operatorname{Re}p > 0$, поэтому $e^{(a-\operatorname{Re}p)\delta} \to 0$ при $\operatorname{Re}p \to +\infty$. Вследствие этого существует $R_0 > 0$ такое, что при $\operatorname{Re}p > R_0$ выполнено $e^{(a-\operatorname{Re}p)\delta}M < \varepsilon$. Таким образом, мы показали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется число $R_0 > 0$ такое, что для всех p, $\operatorname{Re}p > R_0$, выполнено неравенство $|F(p)| \le 2\varepsilon$. Это означает (в силу определения предела), что $\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to+\infty} F(p) = 0$. Теорема доказана. □

Замечание 2. Если $F(p)$ — функция, аналитическая в бесконечно удаленной точке, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому направлению, а не только при $\operatorname{Re}p \to +\infty$.

Пример 2. Рассмотрим оригинал $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Его изображение $F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$. Если $\alpha = 0$, то $1 \doteqdot \frac{1}{p}$ (см. пример 1). Отметим, что $F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости, кроме точки $p_0 = \alpha$, где она имеет полюс первого порядка. Пользуясь приведенной теоремой мы можем утверждать только, что $F(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha$. Отметим также, что $F(p) \to 0$ при стремлении $p \to \infty$ по любому направлению, что согласуется с замечанием 2.

Замечание 3. Кроме участия в доказательстве приведенной теоремы, теорема об аналитической зависимости интеграла от параметра оказывается полезной при нахождении изображений. Приведем утверждение, которое дает способ нахождения изображений, если оригинал зависит от некоторого комплексного параметра α.

Следствие 1. *Пусть функция $f(t,\alpha)$ при каждом фиксированном значении α является оригиналом, и ей соответствует изображение $F(p,\alpha)$:*

$$F(p,\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,\alpha)e^{-pt}\,dt = \tilde{F}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}(t,\alpha)\,dt.$$

При соблюдении условий теоремы об аналитической зависимости интеграла от параметра для функции $\tilde{f}(t,\alpha)$ можно заметить, что

$$\frac{\partial F(p,\alpha)}{\partial \alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha} e^{-pt}\,dt.$$

Или:

$$\frac{\partial F(p,\alpha)}{\partial \alpha} \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Покажем, как можно применять это следствие.

Пример 3. Возьмём функции из примера 2 $e^{\alpha t} \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \frac{1}{p-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Здесь параметром является α. Дифференцируя левую и правую части соотношения по этому параметру, придём к новому соотношению: $te^{\alpha t} \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \frac{1}{(p-\alpha)^2}$. Продолжение дифференцирования приводит к соответствиям: $t^n e^{\alpha t} \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$. Полагая $\alpha = 0$, получим $t^n \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \frac{n!}{p^{n+1}}$. В чем Вы несомненно убедились, когда решали задачу 8, находя изображение непосредственным интегрированием оригинала.

3 Простейшие свойства преобразования Лапласа

3.1 Линейность преобразования Лапласа

Теорема 3 (о линейности преобразования Лапласа)**.** *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $f(t) \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} F(p)$. $g(t) \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} G(p)$. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha f(t) + \beta g(t)$ — оригинал и $\alpha f(t) + \beta g(t) \mathrel{.}\!\!=\!\!\mathrel{\cdot} \alpha F(p) + \beta G(p)$.*

Доказательство. Доказательство сразу же следует из свойства линейности интеграла.

Заметим только, что если интегралы сходятся в разных полуплоскостях $\operatorname{Re} p > a(f)$ и $\operatorname{Re} p > a(g)$, то сумма сходится в их общей части.

Нас, как правило, не будет интересовать, в какой именно полуплоскости сходится интеграл, лишь бы он вообще где-нибудь сходился. $\square$

Пример 4. Найдём изображение функции $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$. По теореме линейности и примеру 2:

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right\} = \frac{1}{2i}\,\frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = F(p).$$

Заметим, что $F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ — функция аналитическая всюду, кроме точек $p = \pm i\omega$, $F(\infty) = 0$. При этом интегралы, определяющие изображение $e^{\pm i\omega t}$, сходятся в области $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega)$, т. е. $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$. Изображение функции $\sin \omega t$ можно было бы найти и непосредственно, взяв интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t \, dt$.

3.2 Теорема подобия

Теорема 4 (подобия)**.** *Пусть* $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$*,* $\lambda > 0$*. Тогда* $f(\lambda t)$ *— оригинал и* $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F(p/\lambda)$*.*

Доказательство. Имеем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, dt$. Тогда

$$f(\lambda t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} \, dt =$$

(делаем замену переменной $s = \lambda t$)

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(s) e^{-ps/\lambda} \, ds = \frac{1}{\lambda} F(p/\lambda).$$

Интеграл сходится, если $\operatorname{Re} p > \lambda a(f)$. $\square$

3.3 Теорема смещения

Теорема 5 (смещения)**.** *Пусть* $f(t)$ *— оригинал,* $f(t) \doteqdot F(p)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. *Тогда* $e^{-\alpha t} f(t)$ *— оригинал и* $e^{-\alpha t} f(t) \doteqdot F(p+\alpha)$.

Доказательство. Имеем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\,dt$. Тогда

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+\alpha)t}\,dt = F(p+\alpha).$$

Интеграл сходится, если $\operatorname{Re} p > a(f) - \operatorname{Re}\alpha$. □

Задачи

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремами подобия и смещения, найти изображения следующих оригиналов:

12. $f(t) = \cos\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

13. $f(t) = \operatorname{sh}\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

14. $f(t) = \operatorname{ch}\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

15. $f(t) = t^2 - 1$.

16. $f(t) = \cos^2\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

17. $f(t) = \sin(\omega t + \alpha)$, $\omega, \alpha \in \mathbb{C}$.

18. $f(t) = e^{\alpha t}\sin\omega t$, $\omega, \alpha \in \mathbb{C}$.

19. $f(t) = e^{\alpha t}\cos\omega t$, $\omega, \alpha \in \mathbb{C}$.

20. $f(t) = e^{-t}\cos^2 t$.

21. $f(t) = \operatorname{ch}\omega t\cos\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

22. $f(t) = \operatorname{sh}\omega t\cos\omega t$, $\omega \in \mathbb{C}$.

Используя дифференцирование по параметру уже известные оригиналы и их изображения, получите изображения следующих оригиналов:

23. $f(t) = t^n\sin\omega t$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{C}$.

24. $f(t) = t^n \cos\omega t$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{C}$.

25. $f(t) = t^n \operatorname{sh}\omega t$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{C}$.

26. $f(t) = t^n \operatorname{ch}\omega t$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{C}$.

Используя результаты предыдущих задач и примеров, найдите по приведенным изображениям их оригиналы.

27. $F(p) = \frac{3}{p+2}$.

28. $F(p) = \frac{1}{p^2+9}$.

29. $F(p) = \frac{3p-2}{p^2+1}$.

30. $F(p) = \frac{2p+1}{p^2-4}$.

31. $F(p) = \frac{1}{(p-3)^2}$.

32. $F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$.

33. $F(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^n}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

34. $F(p) = \frac{6}{(p^2-1)(p^2-4)}$.

4 Запаздывание оригинала

По договоренности (см. параграф § 1), все оригиналы — это функции, равные нулю при $t < 0$. Для $a > 0$ положим $f_a(t) = f(t-a)$. Если $f(t) = 0$ при $t < 0$, то $f_a(t) = 0$ при $t < a$.

Теорема 6 (о запаздывании оригинала)**.** *Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, $a > 0$. Тогда $f_a(t)$ — оригинал и $f_a(t) \doteqdot e^{-pa}F(p)$.*

Доказательство. Имеем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$. Тогда

$$f_a(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f_a(t)e^{-pt}\,dt = \int\limits_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}\,dt =$$

(замена переменной $s = t - a$)

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(s) e^{-p(a+s)}\, ds = e^{-pa} \int\limits_0^{+\infty} f(s) e^{-ps}\, ds = e^{-pa} F(p).$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re} p > a(f)$. □

Пример 5. Найдём изображение «сдвинутой» функции Хевисайда

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq a, \\ 0, & \text{при } t < a, \end{cases}$$

где $a > 0$. В примере 1 получено, что $H(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Тогда по теореме запаздывания $H_a(t) = H(t-a) \risingdotseq e^{-pa} \frac{1}{p}$.

Пример 6. Найдём изображение единичного импульса

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t < a, \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t \geq a, \end{cases}$$

где $a > 0$. Ясно, что $\varphi(t) = H(t) - H_a(t)$. По теореме линейности и примерам 1 и 5

$$\varphi(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - e^{-pa}\frac{1}{p} = \frac{1 - e^{-pa}}{p}.$$

Задачи

Нарисовать графики следующих оригиналов и найти их изображения:

35. $f(t) = (t-1)H_1(t)$.

36. $f(t) = e^t H_2(t)$.

37. $f(t) = H_{\pi/2}(t)\cos(t - \pi/2)$.

38. $f(t) = H_\pi(t)\sin t$.

39. $f(t) = H_2(t)\sin^2(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Нарисовать график и найти изображение системы двух импульсов:

40. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [0, a) \cup [T, T+b), \\ 0, & \text{при } t \in (-\infty, 0) \cup [a, T) \cup [T+b, +\infty), \end{cases}$ где $0 < a < T$, $b > 0$.

Нарисовать графики и найти изображение периодических систем прямоугольных импульсов:

41. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [nT, nT+a), \\ 0, & \text{при } t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [nT, nT+a), \end{cases}$ где $0 < a < T$.

42. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [2na, (2n+1)a), \\ -1, & \text{при } t \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [(2n+1)a, (2n+2)a), \\ 0, & \text{при } t \in (-\infty, 0), \end{cases}$ где $a > 0$.

Нарисовать график и найти изображение периодической системы синусоидальных импульсов:

43. $f(t) = H(t)H(\sin t)\sin t$.

5 Преобразование Лапласа производных и интегралов

5.1 Теорема о дифференцировании оригинала

Теорема 7 (о дифференцировании оригинала)**.** *Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, $f'(t)$ — оригинал. Тогда $f(t)$ — оригинал и*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0), \tag{1}$$

где $F(p) \doteqdot f(t)$.

Доказательство. Докажем, что f — оригинал. Рассмотрим $a > \max(0; a(f'))$.

Выпишем оценку:

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \left| \int\limits_0^t f'(s)\,ds + f(0) \right| e^{-at}\,dt$$
$$\leq \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^t |f'(s)|e^{-at}\,ds\,dt + |f(0)| \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\,dt =$$

(изменим порядок интегрирования в первом интеграле)

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f'(s)| \int\limits_s^{+\infty} e^{-at}\,dt\,ds + \frac{1}{a}|f(0)| = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} |f'(s)|e^{-as}\,ds + \frac{1}{a}|f(0)|.$$

Так как $f'(t)$ — оригинал, то в силу выбора постоянной $a > a(f')$ первый интеграл сходится. Обозначим значение этого интеграла буквой M. Тогда завершение оценки будет выглядеть так:

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\,dt \leq (M + |f(0)|)/a < \infty.$$

Следовательно, $f(t)$ —- оригинал, причем $a(f) \leq \max(0; a(f'))$. Докажем сейчас требуемый в дальнейших рассуждениях следующий факт

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0 \qquad (2)$$

для $\operatorname{Re} p > \max(0; a(f'))$. Пусть $\operatorname{Re} p > \max(0; a(f'))$. Фиксируем, во-первых, постоянную a такую, что $\max(0; a(f')) < a < \operatorname{Re} p$, во-вторых, число $\varepsilon > 0$

такое, что $a - \varepsilon > \max(0; a(f'))$. Тогда

$$|f(t)e^{-pt}| \le \left| \int\limits_0^t f'(s)\,ds + |f(0)| \right| e^{-at} \le e^{-(a-\varepsilon+\varepsilon)t} \int\limits_0^t |f'(s)|\,ds + |f(0)|e^{-at}$$

$$\le e^{-\varepsilon t} \int\limits_0^t |f'(s)| e^{-(a-\varepsilon)t}\,ds + |f(0)|e^{-at} \le e^{-\varepsilon t} \int\limits_0^t |f'(s)| e^{-(a-\varepsilon)s}\,ds + |f(0)|e^{-at}$$

$$\le e^{-\varepsilon t} \int\limits_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(a-\varepsilon)s}\,ds + |f(0)|e^{-at}$$

$$= e^{-\varepsilon t} M(\varepsilon) + |f(0)|e^{-at} \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty;$$

где

$$M(\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(a-\varepsilon)s}\,ds < \infty.$$

Приступим теперь к доказательству формулы (1). Это легко сделать, если проинтегрировать по частям

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0).$$

Что и требовалось доказать. □

Исходя из доказательства теоремы и пользуясь принципом математической индукции, нетрудно сформулировать и доказать

Следствие 2. *Пусть $f(t) \in C^n[0, +\infty)$, $f^{(n)}(t)$ — оригинал. Тогда $f^{(k)}(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$, — оригиналы и*

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

где $F(p) \doteqdot f(t)$.

Доказательство. Применяя теорему о дифференцировании оригинала последовательно к функциям $f^{(n-1)}(t), f^{(n-2)}(t), \dots, f(t)$, получаем, что эти функции являются оригиналами, и

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteqdot p\{pF(p) - f(0)\} - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \dots,$$

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(t) &\doteqdot p\{p^{n-2}F(p) - p^{n-3}f(0) - p^{n-4}f'(0) - \dots - f^{(n-3)}(0)\} - f^{(n-2)}(0) \\ &= p^{n-1}F(p) - p^{n-2}f(0) - p^{n-3}f'(0) - \dots - pf^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &\doteqdot p\{p^{n-1}F(p) - p^{n-2}f(0) - p^{n-3}f'(0) - \dots - f^{(n-2)}(0)\} - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

□

5.2 Теорема о предельных соотношениях

Теорема о дифференцировании оригинала дает нам два важных равенства, называемых «предельными соотношениями» и связывающих значения оригинала и изображения на концах области их определения. Оформим их как теорему.

Теорема 8 (о предельных соотношениях)**.** 1) *Если $f'(t)$ является оригиналом, то*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} pF(p) = f(0), \tag{3}$$

где $F(p) \doteqdot f(t)$, $f(0) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t)$.

2) *Если, кроме того, существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = f(\infty)$, то*

$$\lim_{p \to 0, \operatorname{Re} p > 0} pF(p) = f(\infty), \tag{4}$$

Доказательство. 1) По теореме о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$

а по теореме 1 $pF(p) - f(0) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$, что равносильно $pF(p) \to f(0)$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

2) Так как существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$, то $f(t)$ ограничена. Поэтому её показатель роста меньше или равен нулю. Следовательно, $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. По теореме о дифференцировании оригинала для изображения $f'(t)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0). \tag{5}$$

Интеграл в левой части равенства существует при $p = 0$, и по теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра

$$\lim_{p\to 0, \operatorname{Re} p>0} \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу по $p \to 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, в (5), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)\,dt = \lim_{p\to 0, \operatorname{Re} p>0} pF(p) - f(0),$$

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{p\to 0, \operatorname{Re} p>0} pF(p) - f(0),$$

что равносильно (4). $\square$

Соотношения (3) и (4) полезны для проверки вычислений. Например (используем формулу (3)):

а) из примера 4 $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\omega \in \mathbb{C}$, и

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} p\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = 0 = \sin(\omega\cdot 0);$$

б) из задачи 12 $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\omega \in \mathbb{C}$, и

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} p\frac{p}{p^2+\omega^2} = 1 = \cos(\omega\cdot 0).$$

Формулой (4) следует пользоваться с осторожностью. Если сразу не проверить существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(\infty)$, то можно прийти к неверным результатам. Так $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ и $\lim\limits_{p\to 0, \operatorname{Re} p>0} p\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = 0$, но $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin\omega t$ не существует, поэтому формула (4) не применима. Для функции Хевисайда $H(t)$ предел $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t) = 1$ существует, поэтому формула (4) применима: $\lim\limits_{p\to 0, \operatorname{Re} p>0} p\frac{1}{p} = 1 = H(0+)$. Как, впрочем, и формула (3): $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} p\frac{1}{p} = 1 = H(+\infty)$.

5.3 Теорема об интегрировании оригинала

Теорема 9 (об интегрировании оригинала)**.** *Пусть* $f(t)$ *— оригинал, непрерывный при* $t \geq 0$*,* $f(t) \risingdotseq F(p)$*. Тогда* $\int\limits_0^t f(s)\,ds \risingdotseq F(p)/p$*.*

Доказательство. Введём в рассмотрение функцию $g(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds$. Тогда $g(t)$ — непрерывная функция, $g(0) = 0$, а её производная $g'(t) = f(t)$ является оригиналом. По теореме о дифференцировании оригинала $g(t)$ тоже является оригиналом, и для неё выполняется соотношение:

$$f(t) = g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(0) = pG(p) = F(p),$$

где

$$G(p) \fallingdotseq g(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds.$$

Последнее равносильно доказываемому равенству

$$\int\limits_0^t f(s)\,ds \risingdotseq F(p)/p.$$

При этом $a(g) \leq \max(0; a(g')) = \max(0; a(f))$. □

Эти теоремы легко проиллюстрировать на уже известных простых примерах.

Пример 7. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ из примера 2 известно $e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$,

$$(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{\alpha}{p-\alpha}.$$

С другой стороны, по теореме о дифференцировании оригинала

$$(e^{\alpha t})' \risingdotseq p\frac{1}{p-\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{p-\alpha}.$$

Предлагаем заинтересованным лицам проверить теоремы о дифференцировании и интегрировании оригиналов из этого параграфа для следующих оригиналов $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

А вот более сложный

Пример 8. Найдём оригинал $f(t)$, если известно, что ему соответствует изображение $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}$, $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из примера 4 мы знаем, что $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Поэтому по теореме об интегрировании оригинала

$$\int\limits_0^t \sin\omega s\, ds \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

или

$$\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t) \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Еще раз применяя эту же теорему, получим

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t (1-\cos\omega s)\, ds \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

или

$$\frac{1}{\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Свойство линейности преобразования Лапласа позволяет поделить обе части нашего соответствия на ω. Получаем

$$\frac{t}{\omega^2} - \frac{\sin\omega t}{\omega^3} \risingdotseq \frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{t}{\omega^2} - \frac{\sin\omega t}{\omega^3}.$$

Задачи

Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях, считая, что к функции $f(t)$ применима теорема о дифференцировании оригинала и её следствие.

44. $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) + 1$, $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$.

45. $f^{(4)}(t)+4f'''(t)+2f''(t)-3f'(t)-5$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = -3$, $f'''(0) = 5$.

46. $f''(t) + 4f'(t) + 4f(t)$, $f(2) = 2$, $f'(2) = -3$.

Используя теорему об интегрировании оригинала, найти оригинал $f(t)$ по известному изображению $F(p)$.

47. $F(p) = \frac{1}{p(p-2)}$.

48. $F(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p-1}{p+1}$.

49. $F(p) = \frac{54}{p^3(p-3)}$.

50. $F(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p-2}{p^2+4}$.

51. $F(p) = \frac{2p-\pi}{p^3(p-\pi)}$.

Применяя различные приёмы, найти оригинал $f(t)$ по известному изображению $F(p)$.

52. $F(p) = \frac{p^2+9p-9}{p^3-9p}$.

53. $F(p) = \frac{11p-14}{p^3-p^2-4p+4}$.

54. $F(p) = \frac{4-2p}{p^3+4p}$.

Найти изображения следующих интегралов:

55. $\int\limits_0^t (s - \cos s)\, ds$.

56. $\int\limits_0^t s^3 e^{-s}\, ds$.

57. $\mathrm{si}(t) = -\int\limits_t^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds$ (интегральный синус, $t \geq 0$).

58. $\mathrm{ci}(t) = -\int\limits_t^{+\infty} \frac{\cos s}{s}\, ds$ (интегральный косинус, $t \geq 0$).

59. $\mathrm{Ei}(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{e^s}{s}\, ds$ (интегральная показательная функция, $t < 0$).

60. $\mathrm{li}(t) = \int\limits_0^t \frac{ds}{\ln s}$ (интегральный логарифм, $0 < t < 1$).

6 Дифференцирование и интегрирование изображений

6.1 Теорема о дифференцировании изображения

Теорема 10 (о дифференцировании изображения)**.** *Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда $tf(t) \doteqdot -F'(p)$.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения теоремы. Пусть $a(f)$ — показатель роста оригинала $f(t)$. Рассмотрим произвольное число $a > a(f)$ и некоторое число ε такое, что $a - \varepsilon > a(f)$. В силу свойств показательной и линейной функций найдётся число $b > 0$ такое, что $|t| \leq e^{\varepsilon t}$ для всех чисел $t \geq b$. Покажем, что $\int\limits_0^{+\infty} |tf(t)|e^{-at}\, dt < \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} |tf(t)|e^{-at}\, dt &= \int\limits_0^{b} |tf(t)|e^{-at}\, dt + \int\limits_b^{+\infty} |tf(t)|e^{-at}\, dt \\ &\leq b\int\limits_0^{b} |f(t)|e^{-at}\, dt + \int\limits_b^{+\infty} |f(t)|e^{-(a-\varepsilon)t}\, dt \\ &\leq b\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}\, dt + \int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-(a-\varepsilon)t}\, dt < \infty.\end{aligned}$$

Оба интеграла сходятся, так как $a > a(f)$ и $a - \varepsilon > a(f)$. Следовательно и сумма их конечна. Итак, мы доказали, что функция $tf(t)$ является оригиналом. Докажем теперь формулу:

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}\,dt \doteqdot -tf(t).$$

Второе равенство здесь получено в результате дифференцирования под знаком интеграла. Эта операция законна в силу теоремы об аналитической зависимости интеграла от параметра. Условия применимости этой теоремы мы предоставляем проверить читателю. □

Следствие 3. *Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда*

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t).$$

Доказательство. Тот факт, что $t^n f(t)$ — тоже оригинал при любом целом n, является прямым следствием той части доказательства теоремы о дифференцировании изображения, где показывается, что $tf(t)$ — оригинал. Действительно, взяв в качестве $f(t)$ функцию $tf(t)$ и проведя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы, мы получим, что оригиналом является функция $t^2 f(t)$. Взяв, в свою очередь, в качестве функции $f(t)$ функцию $t^2 f(t)$, получим, что оригиналом является функция $t^3 f(t)$. И так дале. Взяв, на $(n-1)$-ом шаге, в качестве функции $f(t)$ функцию $t^{n-1} f(t)$, получим, что оригиналом является функция $t^n f(t)$.

Формулу доказывает цепочка соотношений:

$$F'(p) \doteqdot -tf(t),$$

$$F''(p) = \frac{d}{dp}F'(p) \doteqdot -t(-tf(t)) = t^2 f(t), \ldots,$$

$$F^{(n)}(p) = \frac{d}{dp}F^{(n-1)}(p) \doteqdot -t((-1)^{n-1}t^{n-1}f(t)) = (-1)^n t^n f(t).$$

□

Пример 9. Известно (см. пример 4), что $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. По теореме о дифференцировании изображения

$$t\sin\omega t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

6.2 Теорема об интегрировании изображения

Теорема 11 (об интегрировании изображения)**.** *Пусть* $\frac{f(t)}{t}$ *— оригинал. Тогда* $f(t)$ *— оригинал и* $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_{p}^{+\infty} F(q)\,dq$*, где* $F(p) \fallingdotseq f(t)$*, а интегрирование понимается как интегрирование по любому контуру* γ*, соединяющему точку* p *с бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости и удовлетворяющему условиям* $\gamma \subset \{p \in \mathbb{C} |\, \operatorname{Re} p > a(f)\}$ *и* $\operatorname{Re} q \to +\infty$ *при* $q \in \gamma$ *и* $q \to \infty$*.*

Доказательство. Положим $g(t) = f(t)/t$, $G(p) \fallingdotseq g(t)$. По теореме о дифференцировании изображения $f(t) = tg(t)$ является оригиналом и выполнены соотношения

$$f(t) = tg(t) \risingdotseq -G'(p) = F(p).$$

Это означает, что $G(p)$ является первообразной для функции $-F(p)$ в односвязной области

$$\Omega = \{p \in \mathbb{C} |\, \operatorname{Re} p > a(f)\},$$

и по формуле Ньютона — Лейбница

$$G(p) = \int\limits_{\gamma} F(q)\,dq + G(\infty),$$

где γ — любой контур, соединяющий точки p и ∞ и лежащий в области Ω. Поскольку $g(t)$ — оригинал, то по теореме 1 из параграфа 2 $G(\infty) = 0$ и формула принимает вид: $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_{p}^{\infty} F(q)\,dq$. □

Замечание 4. Если $f(t)/t$ — оригинал, то по теореме о дифференцировании изображения $f(t)$ — тоже оригинал. Обратное неверно: если $f(t)$ — оригинал, то $f(t)/t$ может таковым не являться. Об этом следующий пример.

Пример 10. Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, — оригинал, рассмотренный в примере 2. Однако $f(t)/t = e^{\alpha t}/t$ оригиналом не является, так как не является локально-интегрируемой функцией на полупрямой $[0; +\infty)$ в силу неинтегрируемой особенности в точке $t = 0$. Бездумное применение теоремы приведет к тому, что появившийся интеграл в правой части соотношения $\frac{e^{\alpha t}}{t} \risingdotseq \int\limits_{p}^{+\infty} \frac{dq}{q-\alpha}$ расходится.

А вот в следующем примере функция $f(t)/t$ уже является оригиналом.

Пример 11. Пусть $f(t) = e^{\alpha t} - e^{\beta t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда в силу линейности преобразования Лапласа и примера 2

$$f(t) = e^{\alpha t} - e^{\beta t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta}.$$

Имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\alpha \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha t} - \beta \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta t} \right) = \alpha - \beta.$$

Поэтому для фукции $f(t)/t$ особенность в точке $t = 0$ является интегрируемой. В других точках полупрямой $[0; +\infty)$ функция $f(t)/t$ является непрерывной. Тем самым $f(t)/t$ — локально-интегрируемая функция на полупрямой $[0; +\infty)$ на $[0; +\infty)$. Кроме того,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{f(t)}{t} \right| e^{-at}\, dt < \infty$$

для $a > \max(\operatorname{Re}\alpha; \operatorname{Re}\beta)$. Поэтому фукция $f(t)/t$ является оригиналом. Следовательно, к ней применима теорема об интегрировании изображения:

$$f(t)/t \stackrel{\cdot}{=} \int\limits_p^{+\infty} \left(\frac{1}{q-\alpha} - \frac{1}{q-\beta} \right) dq = \ln \frac{q-\alpha}{q-\beta}\Big|_p^{\infty} = \ln 1 - \ln \frac{p-\alpha}{p-\beta} = \ln \frac{p-\beta}{p-\alpha}.$$

Задачи

Используя теорему о дифференцировании изображения, найти изображения следуших оригиналов ($\omega \in \mathbb{C}$):

61. $f(t) = t \cos \omega t$.

62. $f(t) = t^2 \cos \omega t$.

63. $f(t) = t^3 \sin \omega t$.

64. $f(t) = t^n e^{\omega t}$, $n \in \mathbb{N}$.

65. $f(t) = te^{-t} \cos \omega t$.

66. $f(t) = te^{-t}\operatorname{ch}\omega t$.

67. $f(t) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$.

68. $f(t) = \frac{1}{\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t))$.

Используя теорему об интегрировании изображения, найти изображения следущих оригиналов ($\alpha, \omega \in \mathbb{C}$):

69. $f(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}$.

70. $f(t) = \frac{\sin\omega t}{t}$.

71. $f(t) = \frac{\cos t - 1}{t}$.

72. $f(t) = e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$.

Пользуясь теоремой об об интегрировании изображения, найти оригиналы по приведенным изображениям.

73. $F(p) = \frac{1}{(p-4)^2}$.

74. $F(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)^2}$.

75. $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$.

76. $F(p) = \operatorname{arcctg}(p+1)$.

7 Свертка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля

7.1 Свертка оригиналов

Определение 1. *Свёрткой* оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называется функция, обозначаемая $(f * g)(t)$ и определяемая равенством

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds, \quad t \geq 0$$

Легко убедиться, что свертка коммутативна, т. е. $(f*g)(t) = (g*f)(t)$, ибо

$$(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds =$$

(замена $u = t - s$)

$$= \int\limits_t^0 f(t-u)g(u)\,(-du) = \int\limits_0^t g(u)f(t-u)\,du = (g*f)(t).$$

7.2 Теорема Бореля об умножении изображений

Теорема 12 (Бореля об умножении изображений)**.** *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— оригиналы,* $f(t) \risingdotseq F(p)$*,* $g(t) \risingdotseq G(p)$*. Тогда* $(f*g)(t)$ *— оригинал и*

$$(f*g)(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

Доказательство. Докажем, что свёртка $(f*g)(t)$ является оригиналом. Возьмем число $b > \max(a(f); a(g))$. Оценим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |(f*g)(t)|e^{-bt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \left|\int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right| e^{-bt}\,dt$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-bt} \int\limits_0^t |f(s)|\,|g(t-s)|\,ds\,dt =$$

(изменим порядок интегрирования)

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f(s)| \int\limits_s^{+\infty} e^{-bt}|g(t-s)|\,dt\,ds =$$

(замена $u = t - s$)

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f(s)| \int\limits_s^{+\infty} e^{-b(s+u)}|g(u)|\,du\,ds$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f(s)|e^{-bs}\,ds \cdot \int\limits_s^{+\infty} e^{-bu}|g(u)|\,du < \infty,$$

так как каждый из интегралов в произведении сходится. Законность смены порядка интегрирования следует из теоремы Тонелли — Фубини.

Итак, мы доказали, что свёртка является оригиналом. По этой же схеме выводится и формула. Приведём только выкладки, ибо обоснование их, состоящее в применеии теперь теоремы Фубини, уже фактически произведено выше.

$$(f*g)(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} (f*g)(t)e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{t} f(s)g(t-s)\,ds e^{-pt}\,dt =$$

(изменим порядок интегрирования)

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(s) \int\limits_s^{+\infty} g(t-s)e^{-pt}\,dt\,ds =$$

(замена $u = t - s$)

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(s) \int\limits_s^{+\infty} g(u)e^{-p(s+u)}\,du\,ds$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\,ds \cdot \int\limits_s^{+\infty} g(u)e^{-bu}\,du = F(p)\cdot G(p).$$

□

Применим теорему Бореля на простом примере.

Пример 12. Рассмотрим оригиналы $f(t) = e^t$ и $g(t) = t$. Найдём их свертку

$$e^t * t = \int\limits_0^{t} e^s(t-s)\,ds = t(e^t - 1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1.$$

Из примеров 1–3 известно, что

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad t \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

Теперь найдём изображение свёртки

а) непосредственно:

$$e^t * t = e^t - t - 1 .\overset{\cdot}{=} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)};$$

б) по теореме Бореля:

$$e^t * t .\overset{\cdot}{=} \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Видим, что результат один и тот же, а трудоемкость во втором случае гораздо ниже, особенно, если нет необходимости находить саму свёртку, а только её изображение.

7.3 Формула Дюамеля

Часто бывает полезна еще одна разновидность теоремы умножения, так называемая формула Дюамеля. Об этом следующая

Теорема 13 (формула Дюамеля)**.** *Пусть $f(t)$ — оригинал, непрерывный при $t \geq 0$, $g(t)$ — функция, непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$, $g'(t)$ — оригинал. Тогда $g(t)$ — оригинал и*

$$\frac{d}{dt}(f * g)(t) .\overset{\cdot}{=} pF(p)G(p),$$

где $f(t) .\overset{\cdot}{=} F(p)$, $g(t) .\overset{\cdot}{=} G(p)$.

Доказательство. Из теоремы о дифферецирование оригинала следует, что $g(t)$ — оригинал. В силу теоремы о дифференцировании интеграла по параметру свёртка $(f * g)(t)$ непрывной и непрерывно дифференцируемой функции является непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме Бореля имеем, что $(f * g)(t) .\overset{\cdot}{=} F(p)G(p)$. Кроме того, $(f * g)(0) = 0$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$\frac{d}{dt}(f * g)(t) .\overset{\cdot}{=} pF(p)G(p) - (f * g)(0) = pF(p)G(p).$$

□

Замечание 5. В условиях теоремы

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds$$
$$=\int\limits_0^t f(s)g'(t-s)\,ds+f(t)g(0)=(f*g')(t)+f(t)g(0).$$

Это следует из формулы дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\varphi(t,s)\,ds=\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial\varphi(t,s)}{\partial t}\,ds+\varphi(t,\beta(t))\beta'(t)-\varphi(t,\alpha(t))\alpha'(t).$$

Задачи

Найти свёртки заданных оригиналов и изображения свёрток.

77. $f(t)=t$, $g(t)=\cos t$.

78. $f(t)=\sin t$, $g(t)=\cos t$.

79. $f(t)=e^t$, $g(t)=e^{-t}$.

Применяя теорему Бореля об умножении изображений, найти оригиналы по их изображениям.

80. $F(p)=\frac{1}{(p-a)(p-b)}$, $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$.

81. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$.

82. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

83. $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Применяя формулу Дюамеля, найти оригиналы по их изображениям.

84. $F(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}$.

85. $F(p)=\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$.

86. $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

87. $F(p)=\frac{p}{(p-1)^3(p^2+2)}$.

8 Свертка изображений. Теорема об умножении оригиналов

Определение 2. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $a(f)$ и $a(g)$ — соответственно их показатели роста, $F(p) \fallingdotseq f(t)$ и $G(p) \fallingdotseq g(t)$. *Свёрткой* двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ называется функция, обозначаемая $(F*G)(p)$ и задаваемая интегралом

$$(F*G)(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)F(p-z)\,dz,$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > a(f)$, p — комплексная переменная такая, что $\operatorname{Re} p > \gamma + a(g)$.

Легко проверить, что свёртка коммутативна, т. е. $(F*G)(p) = (G*F)(p)$. Сформулируем теорему.

Теорема 14 (об умножении оригиналов)**.** *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $a(f)$ и $a(g)$ — соответственно их показатели роста, $F(p) \fallingdotseq f(t)$ и $G(p) \fallingdotseq g(t)$. Тогда произведение $f(t)g(t)$ также является оригиналом, и его изображение является свёрткой изображений, т. е. $f(t)g(t) \risingdotseq (F*G)(p)$.*

Доказательство этой теоремы мы приведём позже, так как оно опирается на формулу обращения, которая будет рассматриваться только в следующем параграфе. Свёртку в правой части формулы обычно стараются вычислить с помощью вычетов. Проиллюстрируем это на простом примере.

Пример 13. Из примеров 2 и 4 известно, что $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$ и $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. По теореме смещения произведению оригиналов $e^t \sin t$ соответствует изображение $\frac{1}{(p-1)^2+1}$. Получим этот же результат по формуле из теоремы об умножении оригиналов

$$\sin t e^t \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{(p-z)-1}\,dz.$$

Известно, что показатель роста оригинала e^t равен 1 (см. пример 2), а показатель роста оригинала $\sin t$ равен 0 (см. пример 4). Поэтому в интеграле $\gamma > 0$ и $\operatorname{Re} p > 1 + \gamma$. Рассмотрим для $R > 0$ контур Γ_R, составленный из отрезка $I_R = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = \gamma, \ |\operatorname{Im} z| \leq R\}$ и дуги C_R окружности с радиусом R и центром в точке $z = 0$. Направление обхода контура — по часовой стрелке — согласовано с направлением движения по прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$ снизу вверх. Рассмотрим интеграл

$$J_R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)}.$$

Так как подынтегральная функция имеет в области, ограниченной контуром, лишь одну особую точку — полюс первого порядка в точке $z = p - 1$, то по основной теореме теории вычетов

$$J_R = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=p-1} \frac{1}{(z^2+1)(p-z-1)} \right\} = -\frac{1/(z^2+1)}{-1}\Big|_{z=p-1} = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Осталось показать, что J_R при $R \to +\infty$ стремится к искомому интегралу. Имеем

$$J_R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{I_R} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)}.$$

То, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{I_R} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} \to \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)}$$

при $R \to +\infty$, очевидно. Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} \to 0$$

при $R \to +\infty$. Используя известную оценку для криволинейных интегралов

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leq l \max_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

где Γ — кривая, по которой ведётся интегрирование, а l — длина этой кривой, оценим интеграл

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi R}{(R^2-1)(R-|p|-1)}.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $R \to +\infty$. Откуда следует, что и интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)}$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. Итак, мы показали, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Кажется достаточно очевидным, что теорему об умножении оригиналов следует применять для нахождения изображения только в тех случаях, когда все менее трудоемкие способы уже исчерпаны.

9 Обращение преобразования Лапласа

Теорема 15 (формула обращения преобразования Лапласа)**.** *Пусть $f(t)$ — оригинал, $a(f)$ — показатель его роста. $F(p) \risingdotseq f(t)$. Если $f(t)$ непрерывна в точке $t_0 > 0$ и имеет в этой точке конечные односторонние производные, то*

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt_0}\,dp, \tag{6}$$

где интегрирование ведётся вдоль прямой $\operatorname{Re} p = a > a(f)$, проходимой снизу вверх и понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t)e^{-at}, & t \geq 0,\\ 0, & t < 0,\end{cases}$$

где $a > a(f)$. Рассмотрим $p = a + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу цепочки равенств

$$F(p) = F(a + i\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+i\lambda)t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-at}e^{-i\lambda t}\,dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(t)](\lambda)$$

можно заключить, что $F(p) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(t)](\lambda)$ где $\mathcal{F}[g(t)](\lambda)$ — прямое преобразование Фурье от функции $g(t)$ (О преобразовании Фурье подробнее см. учебное пособие В. А. Александров «Преобразование Фурье» или учебник Л. Д. Кудрявцев «Курс математического анализа», М: ВШ, 1981. Т. 1, 2) В силу условий теоремы функция $g(t)$ является абсолютно интегрируемой, непрерывной в точке t_0 и имеет в этой точке конечные односторонние производные. По теореме обращения для преобразования Фурье

$$g(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[g(t)](\lambda)e^{i\lambda t_0}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a + i\lambda)e^{i\lambda t_0}\,d\lambda,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Используя связь между $g(t)$ и $f(t)$ и тот факт, что $dp = id\lambda$, получим

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a + i\lambda)e^{(a+i\lambda)t_0}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt_0}\,dp.$$

Формула (6) доказана. □

Формулу (6) называют формулой *обращения* преобразования Лапласа, или формулой *Меллина.*

Замечание 6. Мы доказали теорему обращения при достаточно жестких условиях на функцию $f(t)$. На самом деле, теорема верна и при более слабых ограничениях. Заинтересованный читатель может обратиться, например, к книге Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М: Наука, 1987.

Следствие 4. *Оригинал $f(t)$ однозначно восстанавливается по его изображению $F(p)$ во всех точках, где функция $f(t)$ дифференцируема.*

Доказательство. Если t_0 — точка дифференцируемости оригинала, то

1) $f(t)$ непрерывна в этой точке,

2) существуют и конечны (и равны между собой!) односторонние производные функции $f(t)$ в этой точке.

Таким образом, мы попадаем в условия теоремы обращения, следовательно её заключение справедливо. □

Пример 14. Найдём интеграл

$$I = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2-1)},$$

где $a > 0$. Предположим, что функция $F(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ является изображением. Тогда искомый интеграл только множителем отличается от интеграла в формуле обращения интеграла Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) e^{zt}\,dz$$

и нам остается найти оригинал, соответствующий изображению $F(p)$. Используя разложение на дроби, пример 3 и задачу 13, получаем

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2-1)} = \frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2} \,\dot{=}\, \operatorname{sh} t - t.$$

Легко увидеть, что функция $f(t) = \operatorname{sh} t - t$ является оригиналом с показателем роста $a(f) = 1$. Поэтому по формуле обращения интеграл равен $I = 2\pi i(\operatorname{sh} t - t)$.

Задачи

Найти интегралы в предположении, что $t > 0$.

88. $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{zt}\,dz}{z^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.

89. $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha > \operatorname{Re} a$.

90. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{z^2+1}$, $\alpha>0$.

91. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{ze^{zt}\,dz}{z^2+1}$, $\alpha>0$.

92. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}$, $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$, $\alpha>\max(\operatorname{Re}a;\operatorname{Re}b;\operatorname{Re}c)$.

93. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{zt}(1+e^{\pi z})\,dz}{z^2+1}$, $\alpha>0$.

94. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{zt}\ln\frac{z+1}{z-1}\,dz$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$.

10 Теоремы разложения

Если нам известна функция $f(t)$, то проверить, является ли она оригиналом относительно просто, тогда как выяснить, является ли произвольно заданная функция $F(p)$ изображением, оказывается гораздо сложнее.

Теорема из § 2 даёт необходимые условия того, что $F(p)$ является изображением:

1) $F(p)$ аналитична в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}p>a$;

2) $\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to+\infty}F(p)=0$.

Следущие две теоремы дают некие достаточные условия того, что $F(p)$ является изображением и позволяют найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению.

Сразу оговоримся, что в этом параграфе нам потребуются следущие факты из теории функции комплексного переменного:

1) разложения в ряд Лорана;

2) теория вычетов.

Теорема 16 (первая теорема разложения). *Пусть функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки и* $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, *т. е. её ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}. \tag{7}$$

Тогда

1) $F(p)$ *является изображением;*
2) *функция*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1} t^n}{n!}, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

является её оригиналом.

В доказательстве нам потребуется неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Напомним формулировку соответствующего утверждения.

Теорема 17 (неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана). *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $0 \leq r < R \leq +\infty$. *Пусть аналитическая в кольце* $K = \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R\}$ *функция* $f(z)$ *имеет следующее разложение в ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}, \quad z \in K.$$

Тогда $|c_n| \leq M(\rho)/\rho^n$, *где* $M(\rho) = \max\limits_{z \in C_\rho} |f(z)|$, $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| = \rho\}$ — *окружность с центром в точке* z_0 *радиуса* ρ, $r < \rho < R$.

Доказательство теоремы 16. Выберем R_0 столь большим, чтобы множество $|p| \geq R_0$ не содержало особых точек функции $F(p)$. Так как $p = \infty$ — нуль функции $F(p)$, то существуют $M > 0$ и $R_1 \geq R_0$ такие, что $|F(p)| \leq \frac{M}{R}$ при $|p| \geq R \geq R_1$.

Из неравенств Коши для коэффициентов ряда Лорана следует, что

$$|c_n| \leq R^n \max_{p \in C_R} |F(p)| \leq R^n \frac{M}{R} = MR^{n-1}. \tag{9}$$

Из (7) и (9) получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c_{n+1} t^n}{n!} \right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1} |t|^n}{n!} = Me^{R|t|}.$$

В силу этой оценки, во-первых, ряд (8) сходится во всей комплексной плоскости, т. е. его сумма $f(t)$ является целой функцией, а во-вторых, $|f(t)| \leq Me^{Rt}$ для $t \geq 0$. Отсюда следует, что функция $f(t)$ является оригиналом. В силу равномерной сходимости ряда (8) в любом конечном круге мы можем умножить его на e^{-pt} и проинтегрировать почленно по t в промежутке от 0 до $T > 0$. Если $\operatorname{Re} p > R$, то в промежутке от 0 до $+\infty$.

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{c_{n+1}t^n e^{-pt}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} = F(p).$$

Отсюда следует, что

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}t^n}{n!} \mathrel{\dot{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} = F(p).$$

$\square$

Пример 15. Найдём оригинал $f(t)$ для изображения $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $F(p)$ аналитична в окрестности бесконечности и $F(\infty) = 0$, то её раззложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности равно

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!p^{n+k+1}}.$$

По теореме 16 (первой теореме разложения)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!(n+k)!}.$$

Ряд справа похож на разложение цилиндрической функции J_n (функции Бесселя первого рода) порядка n (см., например, [Лаврентьев, Шабат, п. 70, формула (13)]):

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

Чтобы свести его к этой функции, положим $t = (\tau/2)^2$. Тогда

$$f(t) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = t^{n/2}J_n(2\sqrt{t}).$$

Таким образом, имеем

$$t^{n/2}J_n(2\sqrt{t}).\risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p}.$$

В частности, при $n = 0$:

$$J_0(2\sqrt{t}).\risingdotseq \frac{1}{p}e^{-1/p}.$$

Теорема 18 (вторая теорема разложения). *Пусть функция $F(p)$ аналитична на расширенной (т. е. включающей точку бесконечность) комплексной плоскости за исключением лишь конечного числа особых точек — полюсов $p_1, \ldots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, при этом $F(\infty) = 0$. Тогда*

1) *$F(p)$ является изображением;*

2) *функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p_k}[e^{pt}F(p)], \quad t \geq 0,$$

является её оригиналом.

Доказательство опирается на лемму Жордана.

Лемму Жордана можно найти в [Лаврентьев, Шабат, гл. V, § 2, п. 73].

Доказательство теоремы 18. Напомним, что согласно замечанию из § 2 равенство $F(\infty) = 0$ есть необходимое условие того, что функция, аналитическая в бесконечно удалённой точке, является изображением.

Выберем прямую $\operatorname{Re} p = a$ так, чтобы все конечные особые точки функции $F(p)$ лежали левее этой прямой. Возьмём замкнутый контур, состоящий из отрезка I_R прямой $\operatorname{Re} p = a$ и левой дуги C_R окружности, радиус которой выберем настолько большим, чтобы все конечные особые точки функции $F(p)$ попали внутрь рассматриваемого контура.

По основной теореме о вычетах

$$\int\limits_{I_R} F(p)e^{pt}\,dp + \int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}\,dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p_k}[e^{pt}F(p)].$$

Если $t > 0$, то при $R \to +\infty$ по лемме Жордана $\int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}\,dp \to 0$, $\int\limits_{I_R} F(p)e^{pt}\,dp \to \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$ (в смысле главного значения). Разделим обе части на $2\pi i$. Получим

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p_k}[e^{pt}F(p)].$$

Интеграл слева — это функция, зависящая от переменной t. Обозначим эту функцию через $f(t)$, $t > 0$.

Если $t < 0$, то берём контур, состоящий из отрезка I_R и правой дуги C'_R. Внутри этого контура особых точек нет и по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{I_R} F(p)e^{pt}\,dp + \int\limits_{C'_R} F(p)e^{pt}\,dp = 0.$$

По лемме Жордана второй интеграл при $R \to +\infty$ стремится к нулю. Поэтому

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Тем самым $f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$ удовлетворяет одному из условий, требуемых от оригинала. Осталось проверить, что $f(t)$ является локально интегрируемой и удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)|e^{at}\,dt < \infty \tag{10}$$

при некотором $a \in \mathbb{R}$.

Опять потребуется экскурс в теорию функций комплексного переменного. Напомним, что *мероморфной* функцией называется функция, все конечные особые точки которой являются полюсами.

$\square$

11 Изображения некоторых элементарных и специальных функций

11.1 Изображения дробных степеней

Рассмотрим гамма-функцию Эйлера $\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$, определенную для любого $\alpha > -1$. Напомним наиболее употребительные свойства гамма-функции Эйлера.

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ для $\alpha > 0$.

2) $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

3) $\Gamma(n+1) = n!$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt =$ (замена $t = u^2$) $= 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-}u^2\,du = \sqrt{\pi}$ (воспользовались значением интеграла Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-}u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Теперь можно приступать к отысканию изображения функции $f(t) = t^\alpha$, где числа $\alpha > -1$ не обязательно целые. В предположении, что p — действительное положительное число, вычислим изображение

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}\,dt =$$

(замена переменной $s = pt$)

$$= \frac{1}{p^\alpha+1}\int\limits_0^{+\infty} s^\alpha e^{-s}\,ds.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad p > 0. \tag{11}$$

Продолжая аналитически функцию $F(p)$ с полуоси $(0, +\infty)$ в область $\operatorname{Re} p > 0$, получаем, что формула (11) верна и для $\operatorname{Re} p > 0$, так что $t^\alpha \risingdotseq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\alpha > -1$. У изображения выбирается ветвь $1^{\alpha+1} = 1$. В частности, в силу того, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{12}$$

11.2 Бесселевы функции

Функция

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} =$$

(ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$)

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 p^{2k+1}}$$

(рассматривается ветвь $F(0) = 1$) является аналитической в окрестности точки $p = \infty$ и $F(\infty) = 0$. По первой теореме разложения

$$F(p) \fallingdotseq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = J_0(t),$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя 1-ого рода порядка 0 (см. пример 15). Таким образом, верно

$$J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{13}$$

Используя эту формулу, докажем методом математической индукции, что

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}, \tag{14}$$

где $J_n(t)$ — бесселева функция 1-ого рода порядка n, у изображения берётся ветвь $F(0) = 1$. При $n = 0$ формула (14) совпадает с формулой (13). Так как $J_1(t) = -J_0(t)$, $J_0(0) = 1$, то по теореме о дифференцировании оригинала находим

$$J_1(t) \risingdotseq \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}},$$

т. е. формула (14) верна при $n = 1$.

Пусть эта формула справедлива для всех номеров, меньших n $(n \geq 2)$. Используя формулу $J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t)$ и соотношение $J_{n-1}(0) = 0$, находим

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} - 2p\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Преобразовав правую часть неравенства, получаем

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

11.3 Функции, связанные с интегралом вероятностей

Рассмотрим функции

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{s^2}\,ds, \quad \operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t), \quad f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}),$$

$$g(t) = e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) = e^t - e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Эти функции являются оригиналами, причём

$$f'(t) = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \tag{15}$$

Пусть $F(p) \fallingdotseq f(t)$. Используя формулы (15)и (12) и теорему о дифференцировании оригинала, получаем $pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}}$. Следовательно, $F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$, т. е.

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}. \tag{16}$$

По теореме смещения находим

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

Тогда для функции $g(t)$ получаем

$$g(t) = e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) = e^t - e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = \frac{1}{p+\sqrt{p}}.$$

Снова по теореме смещения находим

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}. \tag{17}$$

Из равенства

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} = \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} + \frac{\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}},$$

формулы (12), теоремы смещения и теоремы об интегрировании оригинала следует, что

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} \fallingdotseq e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha\int\limits_0^t e^{-\alpha s}\frac{ds}{\sqrt{\pi s}},$$

или

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} \fallingdotseq e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \sqrt{\alpha}\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t})$$

для $\alpha > 0$.

11.4 Изображение интегралов Френеля

Интегралы Френеля — это интегралы

$$C(t) = \int\limits_0^t \frac{\cos s\,ds}{\sqrt{2\pi s}}, \quad S(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin s\,ds}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^t e^{is}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$. По формуле (12) и теореме смещения

$$e^{it}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{2(p-i)}},$$

а по теореме об интегрировании оригинала

$$\int\limits_0^t e^{is}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{2(p-i)}}.$$

Аналогично найдём

$$\int\limits_0^t e^{-is}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{2(p+i)}}.$$

По свойству линейности сразу получаем

$$C(t) \,\dot{=}\, \frac{1}{2p\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}+\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}},$$

$$S(t) \,\dot{=}\, \frac{1}{2pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

11.5 Изображение интегрального косинуса и интегральной экспоненты

Из теоремы подобия выведем формулу, полезную не только в этом пункте.

Действительно, для оригинала $f(t)$ и $\alpha > 0$ теорему подобия можно переписать в виде:

$$F(\alpha p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-pt}\,dt,$$

где $F(p) \,\dot{=}\, f(t)$. Интегрированием по α от 0 до 1 получаем

$$\int\limits_0^1 F(\alpha p)\,d\alpha=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\,dt\int\limits_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

(предполагаем, что можно изменить порядок интегрирования). Это равенство означает, что

$$\int\limits_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\alpha} \,\dot{=}\, \int\limits_0^1 F(\alpha p)\,d\alpha.$$

Введём в левом интеграле новую переменную $s=t/\alpha$, а в правом $q=\alpha p$, получим

$$\int\limits_t^{+\infty}\frac{f(s)}{s}\,ds \,\dot{=}\, \frac{1}{p}\int\limits_0^p F(q)\,dq. \tag{18}$$

Приведём несколько примеров применения формулы (18). Из задачи 12 известно, что $\cos t \,\dot{=}\, \frac{p}{p^2+1}$. Тогда получаем изображение интегрального косинуса

$$\operatorname{ci} t=-\int\limits_t^{+\infty}\frac{\cos s}{s}\,ds \,\dot{=}\, \frac{1}{p}\int\limits_0^p\frac{q\,dq}{q^2+1}=\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Из примера 2 известно, что $e^t \risingdotseq \frac{1}{p+1}$. Тогда получаем изображение интегральной экспоненты

$$-\operatorname{Ei}(-t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{e^{-s}}{s}\, ds \risingdotseq \frac{1}{p} \int\limits_{0}^{p} \frac{dq}{q+1} = \frac{1}{p}\ln(p+1)$$

Из формулы (13) известно, что $J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. Тогда получаем

$$\int\limits_{t}^{+\infty} \frac{J_0(s)}{s}\, ds \risingdotseq \frac{1}{p} \int\limits_{0}^{p} \frac{dq}{\sqrt{q^2+1}} = \frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{p^2+1}).$$

11.6 Изображение функции $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$

Пусть $\alpha > 0$. Изображение от оригинала $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$ равно

$$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}-pt}\, dt.$$

Сделаем замену переменной: $pt = z^2$, $dt = \frac{2z\,dz}{p}$. Тогда

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta^2}{z^2}-z^2}\, dz, \tag{19}$$

где $\beta = \frac{\alpha\sqrt{p}}{2}$. Введём обозначение

$$I(\beta) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta^2}{z^2}-z^2}\, dz$$

и вычислим этот интеграл при помощи дифференцирования по параметру. В силу известных теорем о дифференцировании интеграла по параметру интеграл от производной подынтегрального выражения по β равен

$$I'(\beta) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta^2}{z^2}-z^2} \left(-\frac{2\beta}{z^2}\right) dz.$$

Замена переменной $u = \beta/z$, $du = -\frac{\beta\, dz}{z^2}$ приводит нас снова к интегралу $I(\beta)$:

$$I'(\beta) = -2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2 - \frac{\beta^2}{u^2}}\, du = -2I(\beta).$$

В результате мы пришли к дифференциальному уравнению $I'(\beta) = -2I(\beta)$. Его общее решение: $I(\beta) = Ce^{-2\beta}$. Чтобы найти C, положим $\beta = 0$. Тогда $C = I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона). Окончательно получаем $I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\beta}$. Подставляя выражение для $I(\beta)$ в (19) и заменяя $\beta = \frac{\alpha\sqrt{p}}{2}$, получим

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{e}^{-\alpha\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}},$$

т. е. как раз требуемое изображение. Итак:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \,\dot{=}\, \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}}.$$

Дифференцируя обе части приведённой формулы по параметру α, получим формулу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \left(-\frac{2\alpha}{4t}\right) \dot{=}\, \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}} (-\sqrt{p}),$$

или

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \,\dot{=}\, e^{-\alpha\sqrt{p}}.$$

Применим теорему об интегрировании оригинала

$$\int\limits_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi s^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}\, ds \,\dot{=}\, \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$$

и преобразуем интеграл слева при помощи замены переменной $y^2 = \frac{\alpha^2}{4s}$, $s = \frac{\alpha^2}{4y^2}$, $\sqrt{s} = \frac{\alpha}{2y}$, $\frac{ds}{\sqrt{s}} = -\frac{\alpha\, dy}{y^2}$, получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi s^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}\, ds = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

Введём функцию $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-y^2}\,dy$ — интеграл вероятностей. Так как $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = 1$, то интеграл в предыдущей формуле равен

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

и формула соответствия примет вид

$$1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}.$$

12 Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений

12.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения с непрерывной правой частью

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$Lx = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t). \tag{20}$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (20), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{21}$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — заданные постоянные.

Предполагая, что $f(t)$ — оригинал, будем искать решение задачи (20)–(21) такое, что $x(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $X(p) \mathrel{\dot{=}} x(t)$, $F(p) \mathrel{\dot{=}} f(t)$. По теореме о дифференцировании оригинала и свойству линейности, переходя к изображениям в уравнении (20), учитывая условия (21), получим:

$$\begin{aligned}p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - px_{n-2} - x_{n-1} \\ + a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \ldots - px_{n-3} - x_{n-2}) + \ldots + \\ + a_{n-1}(pX(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p)\end{aligned}$$

или $A(p)X(p) - B(p) = F(p)$, где

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$$

— характеристический многочлен уравнения (20),

$$\begin{aligned}B(p) = x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \\ + x_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + x_{n-2}(p + a_1) + x_{n-1}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}. \tag{22}$$

Теперь нужно восстановить оригинал $x(t)$ по его изображению $X(p)$. Это можно сделать с помощью формулы обращения. На практике же вместо формулы обращения обычно используют таблицы оригиналов и их изображений.

В частности, если $f(t)$ — квазимногочлен (линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$), то $X(p)$ — рациональная функция, и для нахождения оригинала эту функцию часто бывает удобно представить в виде суммы простейших дробей или применить вторую теорему разложения.

Для обоснования возможности применения изложенного метода (он называется *операционным*) к задаче (20)–(21) достаточно убедиться в том, что $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ — оригиналы. Воспользуемся представлением решения $x(t)$ в виде $x(t) = \tilde{x}(t) + x_0(t)$, где $\tilde{x}(t)$ — решение однородного уравнения

$$Lx = 0 \tag{23}$$

с заданными начальными условиями (21), а $x_0(t)$ — решение неоднородного уравнения (20) с нулевыми начальными условиями. Известно, что $\tilde{x}(t)$ есть линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$, где $r \geq 0$ — целое число, и поэтому $\tilde{x}(t)$ и все её производные являются оригиналами.

Функцию $x_0(t)$ можно представить в виде свертки

$$x_0(t) = \int\limits_0^t f(s)z(t-s)\,ds, \tag{24}$$

где $z(t)$ — решение уравнения (23), удовлетворяющее условиям:

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0, \quad z^{(n-1)}(0) = 1. \tag{25}$$

Из формулы (24) и начальных условий (25) следует, что

$$x_0^{(k)}(t) = \int\limits_0^t f(s)z^{(k)}(t-s)\,ds + f(t)z^{(k-1)}(0), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Так как изображение функции $z(t)$ есть функция $Z(p) = 1/A(p)$, аналитическая в ∞, $Z(\infty) = 0$, то $z(t)$ — целая функция (см. примечание к первой теореме разложения, параграф § 10) и в силу (24), (25) (свертка!) функции $x_0(t)$, $x_0'(t)$, $\ldots$, $x_0^{(n)}(t)$ являются оригиналами.

Замечание 7. Если начальные условия задаются не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то заменой $\tau = t - t_0$ краевая задача сводится к решению уравнения $Ly(\tau) = f(\tau + t_0)$ с начальными условиями при $\tau = 0$.

Замечание 8. Поскольку мы функции $x(t)$ и $f(t)$ считаем оригиналами, то при $t < 0$ их нужно предполагать равными нулю. Таким образом, мы получаем, вообще говоря, решение $x(t)$, определенное только при $t \geq 0$. Начальные значения являют собой предельные значения при $t \to +0$. Однако, при решении конкретных задач очень часто получившееся решение оказывается справедливым при любых значениях t (если, конечно, правая часть $f(t)$ определена при всех t).

Замечание 9. На практике нет нужды запоминать формулу (22), достаточно помнить метод ее получения.

Пример 16. Найти решение задачи Коши $\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Полагая $X(p) \doteqdot x(t)$, составляем операторное уравнение

$$p^2X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

Откуда $X(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Чтобы восстановить оригинал, можно либо разложить $X(p)$ на элементарные (простые) дроби:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3} \doteqdot e^t - 2e^{2t} + e^{3t},$$

либо воспользоваться второй теоремой разложения (см. также пример из параграфа § 10).

Пример 17. Найти решение задачи Коши: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3 e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

Составим операторное уравнение:

$$p^2 X(p) - p - 2 + 4pX(p) - 4 + 4X(p) = \frac{3!}{(p+2)^4}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} X(p) = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} &= \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+2}{(p+2)^2} + \frac{4}{(p+2)^2} \\ = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2} &\doteqdot \frac{3!}{5!} t^5 e^{-2t} + e^{-2t} + \frac{4}{1!} t e^{-2t} \\ &= e^{-2t}\left(\frac{t^5}{20} + 4t + 1\right) \end{aligned}$$

(по формулам соответствия).

Конечно, эту задачу можно решить обычными для дифференциальных уравнений методами. Например, искать решение уравнения как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений, причем искать последнее методом неопределенных коэффициентов, исходя из того, что правая часть являет собой квазимногочлен. Однако, это потребует гораздо более длинных выкладок.

Пример 18. Найти решение уравнения $\ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + x = \sin t$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 0$.

Операторное уравнеие имеет вид:

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Откуда $X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}$ Для нахождения оригинала воспользуемся второй теоремой разложения:

$$x(t) = \operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} + \operatorname*{Res}_{-i} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} =$$

($\pm i$ — полюсы второго порядка)

$$= \lim_{i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right] + \lim_{-i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right]$$

$$= \frac{e^{it}}{2} \left[-\frac{t^2}{8i} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8i} \right] + \frac{e^{-it}}{2} \left[+\frac{t^2}{8i} - \frac{3t}{8} - \frac{3}{8i} \right]$$

$$= \frac{-t^2+3}{8} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{3t}{8} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$= \frac{-t^2+3}{8} \sin t - \frac{3t}{8} \cos t.$$

Пример 19. Найти решение уравнения $\ddot{x} + x = e^t$ при начальных условиях $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$.

Сделаем сначала замену переменной $t = s + 1$. Тогда $x(t) = x(s+1) = y(s)$. Новая задача Коши будет иметь вид: $\ddot{y} + y = e^{s+1}$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$. Соответствующее ей операторное уравнение:

$$q^2 Y(q) - q + Y(q) = \frac{e}{q-1}.$$

Откуда $Y(q) = \frac{e}{(q^2+1)(q+1)} + \frac{q}{q^2+1}$. Восстанавливаем оригиналы:

$$y(s) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos s - \frac{e}{2} \sin s + \frac{e}{2} e^s.$$

Возвращаемся к старой переменной $t = s + 1$:

$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}.$$

12.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью

До сих пор мы рассматривали дифференциальные уравнения, у которых правая часть была непрерывной функцией и задавалась единым аналитическим выражением. Часто возникают такие уравнения, у которых правая часть на различных интервалах задается различными аналитическими выражениями и имеет точки разрыва. Если при этом правая часть является оригиналом, то операционный метод решения применим. Следует заметить, что при этом функция $x(t)$ будет удовлетворять уравнению (20) во всех точках, где правая часть непрерывна. В точках разрыва проверку производить смысла нет.

Пример 20. Найти при $t>0$ решение уравнения $\dot{x}+x=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{если } 0<t<2,\\ 0, & \text{если } t>2,\end{cases}$$

при нулевом начальном условии $x(0)=0$.

График правой части — «ступенька». Учитывая начальное условие и формулу из примера 6 параграфа § 4, получим операторное уравнение

$$pX(p)+X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p},$$

откуда $X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}$. Разлагая на простые дроби и применяя теорему запаздывания, можем выписать цепочку равенств:

$$\begin{aligned}X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)(1-e^{-2p})\\ &=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)e^{-2p}\\ &\risingdotseq 1-e^{-t}-(1-e^{-(t-2)})H(t-2).\end{aligned}$$

Окончательно,

$$x(t)=\begin{cases}1-e^{-t}, & \text{если } 0<t<2,\\ e^{2-t}-e^{-t}, & \text{если } t>2.\end{cases}$$

Как легко убедиться, функцию $x(t)$ можно доопределить до непрерывной в точке $t=2$, но ее производная $\dot{x}(t)$ в точке $t=2$ терпит разрыв первого рода.

Пример 21. Найти при $t>0$ решение уравнения $\ddot{x}+x=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } 0<t<1,\\ 1, & \text{если } 1<t<3,\\ 0, & \text{если } t>3,\end{cases}$$

при нулевых начальных данных $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

Правая часть — «ступенька». Операторное уравнение имеет вид:

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p}e^{-p}$$

(здесь использовали пример 6 параграфа § 4 и теорему запаздывания). Откуда

$$X(p) = \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p(p^2+1)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)(e^{-p} - e^{-3p})$$
$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)e^{-p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)e^{-3p}.$$

Применяя формулы из таблицы и теорему запаздывания, получим

$$x(t) = (1 - \cos(t-1))H(t-1) - (1 - \cos(t-3))H(t-3)$$

(см. пример 1 параграфа § 1 и пример 5 параграф § 4). Можно записать $x(t)$ в виде

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1 - \cos(t-1), & \text{если } 1 < t < 3, \\ \cos(t-3) - \cos(t-1), & \text{если } t > 3. \end{cases}$$

Легко проверить, что в точках разрыва правой части $t = 1$ и $t = 3$ решение $x(t)$ и его производную $\dot{x}(t)$ можно доопределить до непрерывных функций. Вторая производная $\ddot{x}(t)$ в этих точках терпит разрыв.

12.3 Применение интеграла Дюамеля при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение (20) с нулевыми начальными условиями.

Если известно решение $x_1(t)$ уравнения (20) с той же левой частью, что и (20), а с правой частью $f(t) \equiv 1$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, то интеграл Дюамеля позволяет написать решение уравнения (20) с произвольной правой частью $f(t)$ без всяких вычислений. В самом деле, соответствующие операторные уравнения имеют вид: $A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}$ и $A(p)X(p) = F(p)$, где $X_1(p) \risingdotseq x_1(t)$, $X(p) \risingdotseq x(t)$, $F(p) \risingdotseq f(t)$, $A(p)$ — характеристический многочлен. Тогда $\frac{X(p)}{F(p)} = A(p) = pX_1(p)$ или $X(p) = pX_1(p)F(p)$. Так как $x_1(0) = 0$, то согласно формуле Дюамеля (теоерема 13 параграфа § 7)

$$x(t) = \int\limits_0^t x_1'(s) f(t-s)\, ds \tag{26}$$

или после интегрирования по частям

$$x(t) = x_1(t) f(0) + \int\limits_0^t x_1(s) f'(t-s)\, ds. \tag{27}$$

Воспользовавшись коммутативностью свертки, можно написать еще две формулы.

Отметим, что для получения формул (26) и (27) не нужно знать изображение $F(p)$ правой части уравнения (20).

Пример 22. Записать при помощи интеграла Дюамеля решение уравнения $\ddot{x} - x = f(t)$ при нулевых начальных условиях.

Начнем с уравнения $\ddot{x} - x = 1$. Его операторное уравнение имеет решение

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p} \risingdotseq \operatorname{ch} t - 1 = x_1(t).$$

Поэтому, по (26)

$$x(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sh}(s) f(t-s)\, ds.$$

12.4 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод сводит решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению систем алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций.

Пример 23. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t, \\ \dot{y} + 3x - 2y = 2e^t \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Положим $X(p)\dot{=}.x(t)$, $Y(p)\dot{=}.y(t)$. По теореме о дифференцировании оригинала получаем

$$\dot{x}(t).\dot{=}\,pX(p)-1, \quad \dot{y}(t).\dot{=}\,pY(p)-1.$$

Система операторных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} pX-1+X-Y=\frac{1}{p-1}, \\ pY-1+3X-2Y=\frac{2}{p-1}. \end{cases}$$

После преобразования:

$$\begin{cases} (p-1)X-Y=\frac{1}{p-1}+1, \\ 3X+(p-2)Y=\frac{2}{p-1+1}. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Крамера), находим $X(p)=\frac{1}{p-1}$, $Y(p)=\frac{1}{p-1}$. Что соответствует оригиналам $x(t)=e^t$, $y(t)=e^t$.

Пример 24. Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}-x+y+z=0, \\ \ddot{y}+x-y+z=0, \\ \ddot{z}+x+y-z=0 \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=y(0)=\dot{y}(0)=z(0)=\dot{z}(0)=0$.

Система операторных уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} (p^2-1)X+Y+Z=p, \\ X+(p^2-1)Y+Z=0, \\ X+Y+(p^2-1)Z=0. \end{cases}$$

Решим эту систему по методу Крамера.

$$\Delta = (\text{определитель системы})$$
$$= \begin{vmatrix} p^2-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p^2+1 & 1 & 1 \\ p^2+1 & p^2-1 & 1 \\ p^2+1 & 1 & p^2-1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} p^2+1 & 1 & 1 \\ 0 & p^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & p^2-2 \end{vmatrix} = (p^2+1)(p^2-2)^2,$$

$\Delta_X =$ (заменим в Δ первый столбец на столбец правых частей)
$$= \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & p^2-1 & 1 \\ 0 & 1 & p^2-1 \end{vmatrix} = p[(p^2-1)^2-1] = p^3(p^2-2),$$

$\Delta_Y =$ (заменим в Δ второй столбец на столбец правых частей)
$$= \begin{vmatrix} p^2-1 & p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p^2-1 \end{vmatrix} = -p[(p^2-1)-1] = -p(p^2-2),$$

$\Delta_Z =$ (заменим в Δ третий столбец на столбец правых частей)
$$= \begin{vmatrix} p^2-1 & 1 & p \\ 1 & p^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = p[1-(p^2-1)] = -p(p^2-2).$$

Находим изображения
$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)},$$
$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = -\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)},$$
$$Z(p) = \frac{\Delta_Z}{\Delta} = -\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

Поскольку
$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2-2)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{p^2-2} - \frac{1}{p^2+1}\right\},$$
то
$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2-2)} \doteqdot \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}t - \sin t\right\}. \tag{28}$$

По теореме о дифференцировании оригинала $y(t) = z(t) = \frac{1}{3}\left\{\cos t - \operatorname{ch}\sqrt{2}t\right\}$. Применяя эту теорему трижды к (28), получаем $x(t) = \frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t + \frac{1}{3}\cos t$.

Задачи

Используя преобразование Лапласа, решите следующие задачи Коши (при $t \geq 0$).

95. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

96. $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 6e^{-t}$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$.

97. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{3t}$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

98. $\ddot{x} + 4x = 3\sin t + 10\cos 3t$, $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 3$.

99. $\ddot{x} - x = 4\sin t + 5\cos 2t$, $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -2$.

100. $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin t$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$.

101. $\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, t > \pi \end{cases}$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\omega > 0$.

102. $\dddot{x} + x = 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$.

103. $\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{если } t > 2, \end{cases}$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

104. $\dddot{x} + \dot{x} = \cos t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -2$, $\ddot{x}(0) = 0$.

105. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

106. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3 e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

107. $\ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = \sin t$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0$.

108. $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 2e^{4t}$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

109. $\ddot{x} + \dot{x} = t^2 + 2t$, $x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = -2$.

110. $\dddot{x} + \dot{x} = 0$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = -1$.

111. $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 11\dot{x} + 6x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -3$, $\ddot{x}(0) = 9$.

112. $\dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$, $\ddot{x}(0) = 1$.

Используя Формулу Дюамеля, записать решение следующих дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями в виде интеграла.

113. $\ddot{x} + x = e^{-t^2}$.

114. $\ddot{x} - v^2 x = ae^{-t^2}$, $v > 0$.

115. Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq$. Используя задачу (3) и формулу Дюамеля, записать решение уравнения $\dddot{x} + x = f(t)$ с нулевыми начальными условиями в виде интеграла. Сколько существует вариантов записи решения? Если функция $f(t)$ не только непрерывна, а еще и непрерывно дифференцируема, то появляются еще два варианта записи решения. Какие? Выпишите и их.

Найдите решения следующих задач Коши:

116. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^{3t}$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 1$.

117. $\ddot{x} + \dot{x} = t$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$.

118. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 1$, $x(-1) = \dot{x}(-1) = 0$.

119. $\ddot{y} + \dot{y} = t$, $y(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 0$.

120. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = te^{3t}$, $y(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 1$.

Решите системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

121. $\begin{cases} \dot{x} = y - 1, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -x - 2y, & y(0) = -1. \end{cases}$

122. $\begin{cases} \dot{x} = -y + 2, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = x + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

123. $\begin{cases} \dot{x} - 3x - 2y = 3e^{2t}, & x(0) = 0, \\ \dot{y} + 2x - 3y = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

124. $\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^{t}, & x(0) = 1, \\ \dot{y} + 3x - 2y = 2e^{t}, & y(0) = 1. \end{cases}$

125. $\begin{cases} \dot{x} - 4x + y = -e^{4t}, & x(0) = 0, \\ \dot{y} - x - 4y = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

126. $\begin{cases} \dot{x} + x - y = 0, & x(0) = 1, \\ \dot{y} + x - 3y = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

127. $\begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y = 10e^{2t}, & x(0) = 1, \\ \dot{y} - 2x + y = 7e^{2t}, & y(0) = 3. \end{cases}$

128. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} - y = e^t, \\ 2\dot{x} + \dot{y} + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

129. $\begin{cases} \dot{x} - ax - by = be^{at}, & x(0) = 0, \\ \dot{y} + bx - ay = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

130. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + x + y = t, & x(0) = y(0) = 0, \\ \ddot{x} - \dot{y} + 2x = 3(e^{-t} + 1), & \dot{x}(0) = -1. \end{cases}$

131. $\begin{cases} \ddot{x} - 3x - 4y + 3 = 0, \\ \ddot{y} + x + y - 5 = 0. \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0.$

132. $\begin{cases} \dot{x} = y + z, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = z + x, & y(0) = 1, \\ \dot{z} = x + y, & z(0) = 0. \end{cases}$

133. $\begin{cases} (2\ddot{x} - \dot{x} + 9x) - (\ddot{y} + \dot{y} + 3y) = 0, & x(0) = \dot{x}(0) = 1, \\ (2\ddot{x} + \dot{x} + 7x) - (\ddot{y} - \dot{y} + 5y) = 0, & y(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$

134. $\begin{cases} (\ddot{x} - x + y + z = 0, & x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \\ (\ddot{y} + x - y + z = 0, & y(0) = \dot{y}(0) = 0, \\ (\ddot{z} + x + y - z = 0, & z(0) = \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$

135. $\begin{cases} \dot{x} + y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \\ \dot{y} + x = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$. Исследуйте на непрерывность при $t = 1$ и $t = 2$ получившиеся функции $x(t)$ и $y(t)$, а также их производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$.

13 Применение преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений

13.1 Интегральные уравнения Вольтерра второго рода

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-s)x(s)\,ds, \tag{29}$$

где $f(t)$ и $k(t)$ — заданные функции, а $x(t)$ — искомая. Пусть $X(p) \fallingdotseq x(t)$, $F(p) \fallingdotseq f(t)$, $K(p) \fallingdotseq k(t)$. Переходя в уравнении (29)к изображениям и используя теорему Бореля, получим $X(p) = F(p) + K(p)X(p)$, откуда $X(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}$. Оригинал для $X(p)$ и есть искомое решение уравнения (29).

Пример 25. Решим интегральное уравнение $x(t) = \sin t + \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds$. Операторное уравнение $X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \cdot X(p)$, откуда $X(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1}\right) \fallingdotseq \frac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t) = x(t)$.

13.2 Интегральные уравнения Вольтерра первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром, зависящим только от разности аргументов:

$$\int\limits_0^t k(t-s)x(s)\,ds = f(t). \tag{30}$$

Пусть $X(p) \fallingdotseq x(t)$, $F(p) \fallingdotseq f(t)$, $K(p) \fallingdotseq k(t)$. Переходя к операторному уравнению, получаем $K(p)X(p) = F(p)$ или $X(p) = F(p)/K(p)$. Оригинал для $X(p)$ и есть искомое решение уравнения (30).

Пример 26. Рассмотрим интегральное уравнение $\sin t = \int\limits_0^t x(t-s)x(s)\,ds$. Возьмём от обеих частей преобразование Лапласа $\frac{1}{p^2+1} = X(p) \cdot X(p)$, откуда $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. А эта функция

Задачи

Используя преобразование Лапласа, решите интегральные уравнения Вольтерра второго рода, считая, что $t > 0$.

136. $x(t) = 4e^t + 3t - 4 - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds.$

137. $t = \int\limits_0^t e^{(t-s)}x(s)\,ds.$

138. $x(t) = \int\limits_0^t \cos(t-s)x(s)\,ds + \sin t.$

139. $x(t) = \int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)\,ds + \cos t + 3t + 2.$

140. $x(t) = \int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)\,ds + 6e^{2t} + 4.$

141. $x(t) = 4\int\limits_0^t e^{2(t-s)}x(s)\,ds + \operatorname{ch} 2t + 5.$

142. $x(t) = 4\int\limits_0^t (s-t)x(s)\,ds - 3\cos 2t + 1.$

143. $x(t) = \int\limits_0^t (s-t)x(s)\,ds - 2\cos t + 2010t + 2009.$

144. $x(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds - 3e^{-2t} + 2011.$

145. $x(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds + \sin t.$

146. $x(t) = 9\int\limits_0^t (s-t)x(s)\,ds - \cos 3t + 8.$

14 Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений с частными производными

Для простоты ограничимся случаем, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных x и t, а уравнение имеет вид

$$Lu = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x) + a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (31)$$

где $a, b, c, a_1, b_1 \in C^1([0,l])$ (непрерывно дифференцируемые функции при $x \in [0,l]$) $a > 0$. Будем рассматривать два случая: 1) $a_1 < 0$ — уравнение гиперболического типа, 2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$ — уравнение параболического типа. Начально-краевая задача для уравнения (31) формулируется так:

Найти решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения (31) для $x \in [0,l]$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \text{ (задается лишь в случае гиперболического уравнения),} \end{array} \qquad (32)$$

и краевым условиям:

$$\begin{array}{l} u(0,t) = f(t), \\ \alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = \gamma u(l,t), \end{array} \qquad (33)$$

где α, β и γ — постоянные числа. При $l = +\infty$ второе краевое условие заменяется обычно на условие $u(x,t) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Сформулируем ряд предположений.

1) Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям «согласования» в точках $(0,0)$ и $(l,0)$, обеспечивающим существование достаточно гладкого решения задачи (31)–(33).

2) Пусть функция $f(t)$ является оригиналом $F(p) \dot{=}. f(t)$.

3) Предположим также, что $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, рассматриваемые как функции переменного t, являются оригиналами.

Пусть $U(x,p) = \int\limits_0^\infty u(x,t)e^{-pt}\,dt$ — изображение фунции u. Тогда, считая p параметром, получаем:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} .\dot{=} \int\limits_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt}\,dt = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \risingdotseq \int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt}\,dt = \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2},$$

По теореме о дифференцировании оригинала, учитывая начальные условия, находим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - \varphi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \risingdotseq p^2U(x,p) - u(x,0)p - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2U(x,p) - p\varphi(x) - \psi(x),$$

Граничные условия дают соотношение

$$U(0,p) = F(p),$$

$$\alpha \frac{dU(l,p)}{dx} + \beta(pU(l,p) - \varphi(l) = \gamma U(l,p).$$

Таким образом, операционный метод приводит решение задачи (31)–(33) для уравнения с частными производными к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(x)\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + b(x)\frac{dU(x,p)}{dx} + A(x,p)U(x,p) + B(x,p) = 0 \qquad (34)$$

$$U(0,p) = F(p), \quad \alpha\frac{dU(l,p)}{dx} + \beta(pU(l,p) - \varphi(l) = \gamma U(l,p), \qquad (35)$$

где $A(x,p) = c(x) + a_1(x)p^2 + b_1 p$, $B(x,p) = -a_1(x)\varphi(x)p - a_1(x)\psi(x) - b_1(x)\varphi(x)$, p — комплексный параметр. Если известно, что задача (31)–(33) имеетединственное решение, удовлетворяющее вместе со своими производными первых двух порядков условиям, наложенным на оригиналы, и если задача (34)–(35) имеет единственное решение $U(x,p)$, то, очевидно, решение $u(x,t)$ можно получить как оригинал для $U(x,p)$.

Пример 27. Температура $u(x,t)$ в тонком полуограниченном $(0 \le x < \infty)$ стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

где $a > 0$ — постоянный коэффициент. На левом его конце температура задана: $u(0,t) = f(t)$; начальная температура равна нулю: $u(x,0) = 0$. Найти распределение температуры в любой момент времени $t > 0$.

Переходя к изображениям, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU(x,p) = a^2 \frac{d^2U(x,p)}{dx^2} \tag{36}$$

при условии

$$U(0,p) = F(p). \tag{37}$$

Общее решение уравнения есть функция $U(x,p) = C_1(p)e^{-\sqrt{p}x/a} + C_2(p)e^{\sqrt{p}x/a}$ Ветвь корня определяется условием $\sqrt{1} = 1$. При этом $C_2(p)$ должно быть $\equiv 0$, иначе $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x \to +\infty$. Тогда условие при $x = 0$ дает $C_1(p) = F(p)$, т. е. $U(x,p) = F(p)e^{-\sqrt{p}x/a}$. Чтобы найти оригинал, рассмотрим сначала частный случай $f(t) \equiv 1$ (см. прием, описанный в параграфе 12 п. 3). Тогда $F(p\frac{1}{p}$. Решение задачи (36)–(37) при $F(p) = \frac{1}{p}$ обозначим $U_1(x,p)$, $U_1(x,p) = \frac{1}{p}e^{-\sqrt{p}x/a}$. По формуле $\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ находим оригинал для $U_1(x,p)$:

$$u_1(x,t) = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{e}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-s^2}\, ds.$$

В случае произвольных граничных данных, используют интеграл Дюамеля. Так как

$$U(x,p) = F(p)e^{-\sqrt{p}x/a} = F(p)(pU_1(x,p)) = pF(p)U_1(x,p),$$

то взяв $g(t) = u_1(x,t) = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, $g(0) = 0$, $g'(t) = \frac{x}{2a\sqrt{t^3\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, по формуле из параграфа 7 получим

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}}\, ds$$

или, сделав замену переменной $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t-s}}$

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

При $x = 0$ получим $u(o,t) = f(t)\,\mathrm{erf}(\infty) = f(t) \cdot 1$. Что и требуется.

Задачи

В рамках сформулированных выше предположений решить следующие начально-краевые задачи.

147. Решить задачу о колебаниях струны $0 \le x \le l$ с закрепленными концами, предполагая, что начальные скорости точек струны и начальное отклонение струны заданы, т. е. найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

при нулевых краевых условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

и заданных начальных условиях

$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

148. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,$$

при нулевых начальных условиях

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

и следующих граничных условиях

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \sin \omega t.$$

149. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty,\ t \ge 0,$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x.$$

150. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 1, \quad -\infty < x < +\infty, \ t \geq 0,$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x^2 e^{-x}.$$

151. Найти ограниченные решения уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \geq, \ t \geq 0,$$

при начальных условиях

$$u(0,t) = f(t), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

152. Решить уравнение

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 3xt^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \ t \geq 0,$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = x^3, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u(x,0)}{\partial t^3} = 0,$$

$$u(0,t) = t^4, \quad u(1,t) = 1.$$

15 Преобразование Лапласа обобщённых функций

Для успешного усвоения этого параграфа нужно знание основ теории обобщенных функций в объеме, читаемом на физическом факультете в курсе «Основы функционального анализа» (см., например, В. А. Александров «Обобщенные функции»). Напомним основные факты и определения.

Определение 3. Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется основной, или пробной, если функция φ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и зануляется вне некоторого конечного отрезка, зависящего от функции.

Множество основных функций является линейным пространством, так как сумма двух основных функций и произведение на число являются основными функциями. Пространство основных функций обозначают $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Введем понятие носителя функции.

Определение 4. Носитель функции $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (обозначается $\operatorname{supp}\varphi$) — это замыкание множества точек $t \in \mathbb{R}$, в которых $\varphi(t) \neq 0$, т. е.

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0\}}.$$

Таким образом, носитель основной функции является замкнутым и ограниченным множеством, и пространство основных функций можно называть пространством бесконечно дифференцируемых функцией с компактным носителем.

Сходимость в пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ вводится следующим образом.

Определение 5. Последовательность основных функций $\{\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$, если

1) существует ограниченное замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}$, содержащее носитель каждой функции $\operatorname{supp}\varphi_n \subset M$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любого целого числа $k \geq 0$ последовательность производных $\{\varphi_n^{(k)}(t)\}$ равномерно сходится к $\varphi^{(k)}(t)$ при $n \to \infty$, т. е.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Определение 6. Обобщенной функцией на $\mathbb{R}$ называется линейный непрерывный функционал $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т. е. отображение, которое каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ сопоставляет комплексное число $F(\varphi)$ так, что выполнены свойства

1) линейности: для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любых основных функций $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ верно:

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi);$$

2) непрерывности: для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(t)\}$, сходящейся к какой-либо $\varphi(t)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$, числовая последовательность $\{F(\varphi_n)\}$ сходится к числу $F(\varphi)$ при $n \to \infty$.

Множество всех обобщенных функцией на $\mathbb{R}$ обозначается через $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Обобщенные функции делятся на два класса: регулярные обобщенные функции и сингулярные обобщенные функции.

Определение 7. Обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется регулярной обобщенной функцией, если найдется «обычная» локально интегрируемая на числовой прямой функция $f(t)$, порождающая обобщенную функцию F по формуле

$$F(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt.$$

Здесь интеграл фактически берется по отрезку, которому принадлежит носитель функции $\operatorname{supp}\varphi$, и, в силу локальной интегрируемости функции $f(t)$, существует.

Напомним, что локально интегрируемой на множестве $G \subset \mathbb{R}$ называется функция, обладающая свойством: у каждой точки $t_0 \in G$ существует окрестность $U(t_0) \subset G$ такая что интеграл $\int\limits_{U(t_0)} |f(t)|\,dt$ конечен.

Пространство локально интегрируемых на множестве $G \subset \mathbb{R}$ функций будем обозначать $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$.

Определение 8. Обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется сингулярной.

Пример 28. Функционал $\delta\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ («дэльта»-функция Дирака), задаваемая с помощью формулы: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, является обобщенной функцией на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Несмотря на то, что физики часто записывают ее действие в виде интеграла, δ-функция является сингулярной обобщенной функцией.

Действие произвольной обобщенной функции F на основную функцию φ принято записывать еще и так: $(F, \varphi) = F(\varphi)$.

Следующие операции над обобщенными функциями определяются через их действие на основные.

Сумма $F + G$ обобщенных функций $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ есть также обобщенная функция, действующая по правилу: $(F + G, \varphi) = (F, \varphi) + (G, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Умножение αF обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на число $\alpha \in \mathbb{C}$ — также обощенная функция: $(\alpha F, \varphi) = \alpha(F, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Эти две операции являются следствием того, что обобщенная функция – это линейный функционал.

Таким образом, множество $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций образует линейное пространство.

Произведение бесконечно дифференцируемой функции $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ и обобщенной $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ будет вновь обобщенной функцией, действующей по правилу: $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Линейная замена переменной $t = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, в обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ производится по правилу:

$$(F(as+b), \varphi(s)) = (F(t), \frac{1}{|a|}\varphi(a^{-1}(t-b)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Призводная $F^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — тоже обобщенная функция, чье действие задется по правилу: $(F^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (F^{(k)}, \varphi^{(k)})$.

Как видим, любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой в смысле обобщенных функций.

Последовательность обобщенных функций $\{F_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\}$ называется сходящейся к обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполнено $(F_n, \varphi) = (F, \varphi)$ при $n \to \infty$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ из обобщенных функций $\{F_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\}$ называется сходящимся в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$.

Замечательно, что в теории обобщенных функций любую сходящуюся последовательность или ряд можно почленно дифференцировать без дополнительных условий.

Действительно, если $F_n \to F$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$, то

$$(F_n', \varphi) = -(F_n, \varphi') \to -(F, \varphi') = (F', \varphi)$$

для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, что и означает $F_n' \to F'$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$.

Наша цель — определить преобразование Лапласа обобщенных функций.

Для обычных функций $f(t)$ интеграл Лапласа

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt =$$

(если доопределить $f(t) = 0$ при $t < 0$)

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt = (f(t), e^{-pt})$$

хочется рассматривать как значение регулярной обобщенной функции $f(t)$ на функции e^{-pt}.

Но e^{-pt} не принадлежит пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ основных функций, поэтому мы прибегнем к тому же приему, который используется, чтобы определить преобразование Фурье для обобщенных функций (см., например, В. А. Александров «Обобщенные функции»).

Расширим пространство основных функций, заменив условие компактности носителя пробных функции φ менее стеснительным условием.

Так как в теории преобразования Лапласа рассматриваются функции с носителями на полуоси $t \geq 0$, то на поведение основных функций при $t \to -\infty$ мы не будем накладывать никаких ограничений. Однако мы потребуем, чтобы при $t \to +\infty$ основные функции стремились к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $\frac{1}{t}$.

Таким образом, новый класс S_+ основных функций, очевидно являющийся линейным пространством, состоит и з всех функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что

1) φ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$,

2) для любых целых неотрицательных чисел l и k верно:

$$\lim_{t\to+\infty} t^l \varphi^{(k)}(t) = 0.$$

Можно назвать это пространство пространством «быстро убывающих при $t \to +\infty$ функций».

Обозначим его S_+.

Сходимость в пространстве S_+ определяется следующим образом.

Определение 9. Последовательность $\{\varphi_n \in S_+\}$ сходится к $\varphi \in S_+$ в S_+ при $n \to \infty$, если для любых целых неотрицательных чисел l и k последовательность $t^l\varphi_n^{(k)}(t)$ сходится к $t^l\varphi^{(k)}(t)$ равномерно при $n \to \infty$ на множестве $[a, +\infty)$ для произвольного $a \in \mathbb{R}$.

Определение 10. Линейный и непрерывный функционал $F\colon S \to \mathbb{C}$ на пространстве S_+ называется обобщенной функцией класса S'_+.

Очевидно включение $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset S_+$. Поэтому $S'_+ \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Можно доказать, что все свойства обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ дословно переносятся на функции из S'_+.

Так как обобщенная функция не является функцией в обычном смысле, а является функционалом, то ее значение в точке смысла не имеет. Однако, можно говорить о равенстве нулю в окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$.

Определение 11. Обобщенная функция F равна нулю в окрестности $U \subset \mathbb{R}$ точки $t_0 \in \mathbb{R}$, если для всех основных функций φ, отличных от нуля только в пределах этой окрестности U, $(F, \varphi) = 0$.

Определение 12. Носителем обобщенной функции F называется совокупность точек $t_0 \in \mathbb{R}$ таких, что F не равна нулю ни в какой окрестности $U \subset \mathbb{R}$ точки t_0.

Если F — «обычная» функция, то это определение равносильно приведенному выше определению носителя «обычных» функций.

Теперь мы можем дать определения оригинала и изображаения в смысле обобщенных функций.

Определение 13. Обобщенная функция F с носителем на полуоси $t \geq 0$ является обобщенным оригиналом, если существует действительное число $s_0 \in \mathbb{R}$ такое, что при всех $s > s_0$ обобщенная функция $e^{-st}F(t)$ принадлежит пространству S'_+.

Изображением такого оригинала называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, заданная правилом

$$\mathcal{F}(p) = (F(t), e^{-pt}),$$

которая определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и понимается следующим образом. Для фиксированного $p \in \mathbb{C}$, для которого $\operatorname{Re} p = s > s_0$, выбирается число s_1, $s_0 < s_1 < s$. Тогда

$$(F(t), e^{-pt}) = (e^{-s_1 t}F(t), e^{-(p-s_1)t}) \tag{38}$$

Так как $|e^{-(p-s_1)t}| = e^{-(s-s_1)t}$ быстро стремится к нулю при $t \to +\infty$, то $e^{-(p-s_1)t} \in S_+$. В силу выбора s_1 имеем $e^{-s_1 t}F(t) \in S'_+$, поэтому правая часть равенства (38) определена (она, очевидно, не зависит от выбора s_1).

Отображание, сопоставляющее обобщенному оригиналу изображение по указанному правилу, называется преобразованием Лапласа обобщенных функций.

Для краткости часто вместо слов «обобщенный оригинал» и «преобразование Лапласа обобщенных функций» употребляют слова «оригинал» и «преобразование Лапласа», если из контекста понятно, о каких функциях идет речь.

Замечание 10. Любой «обычный» оригинал $f(t)$ является и обобщенным оригиналом, ибо $e^{-s_1 t}f(t)$ при $s_1 > a(f)$ является локально интегрируемой функцией, а для них

$$(e^{-s_1 t} f(t), e^{-(p-s_1)t}) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt,$$

т. е. совпадает с интегралом Лапласа.

Замечание 11. Любая обобщенная функция F класса $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем принадлежит и классу S'_+. Кроме того, произведение $e^{-st}F(t)$ имеет компактный носитель и также принадлежит S'_+. Если носитель обобщенной функции F лежит на полуоси $t \geq 0$, то для нее определено преобразование Лапласа.

Пример 29. Рассмотрим уже упоминавшуюся δ-функцию. Можно замететь, что ее носитель есть точка $t = 0$, т. к. δ-функция равна нулю в окрестности любой точки $t \neq 0$. Поэтому для нее определено преобразование Лапласа и его можно найти по формуле: $(\delta(t), e^{-pt}) = e^{-pt}|_{t=0} = 1$. А также $(\delta'(t), e^{-pt}) = -(\delta(t), -pe^{-pt}) = (\delta(t), pe^{-pt}) = p$. И вообще $(\delta^{(n)}(t), e^{-pt}) = p^n$. Здесь использовалось правило дифференцирования обобщенных функций.

Преобразование Лапласа обобщенных функций обладает многими свойствами преобразования Лапласа «обычных» функций. Перечислим некоторые из них.

1. Изображение $\mathcal{F}(p)$ обобщенного оригинала является аналитической функцией в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, хотя при этом свойство $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p} \mathcal{F}(p) = 0$ уже не имеет места (см. пример 29).

2. Преобразование Лапласа линейно: Если $F_k(t) \risingdotseq \mathcal{F}_k(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_k$, $k = 1, 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то

$$\alpha F_1(t) + \beta F_2(t) \risingdotseq \alpha \mathcal{F}_1(p) + \beta \mathcal{F}_2(p),$$

$\mathrm{Re}\, p > \max(s_1, s_2)$.

Это свойство — прямое следствие определения.

3. Теорема подобия. Если $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, $\lambda > 0$, то

$$F(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right),$$

$\mathrm{Re}\, p > \lambda s_0$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L}[F(\lambda t)](p) = (\text{по определению}) = (F(\lambda t), e^{-pt}) =$$

(сделаем замену переменной в обобщенной функции)

$$= (F(x), \frac{1}{\lambda}e^{-px/\lambda}) = \frac{1}{\lambda}(F(x), e^{-px/\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}[F(x)]\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Тот факт, что $F(\lambda t)$ будет оригиналом с показателем роста $a(F) = \lambda s_0$ доказывается следующим образом.

Согласно определению оригинала нам нужно показать, что

1) $\operatorname{supp} F(\lambda t) \subset [0, +\infty)$;

2) существует число $s_* \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $s > s_*$ выполнено, что $e^{-st}F(\lambda t) \in S'_+$, причем $s_* = \lambda s_0$.

Первое утверждение очевидно следует из определения носителя обобщенной функции.

Для доказательства второго рассмотрим действие обобщенной функции $e^{-st}F(\lambda t)$ на основную $\varphi(t)$: $(e^{-st}F(\lambda t), \varphi(t)) =$ (замена переменной $\lambda t = x$) $= \frac{1}{\lambda}(e^{-sx/\lambda}F(x), \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)) =$ (введем обозначения $\psi(x) = \varphi\left(\frac{p}{\lambda}\right)$ и $\xi = \frac{s}{\lambda}$) $= \frac{1}{\lambda}(e^{-\xi x}F(x), \psi(\xi))$. Легко убедиься, что $\psi(x) \in S_+$. По предположению, $F(x)$ — оригинал, т. е. для каждого $\xi > s_0$ справедлово $e^{-\xi x}F(x) \in S'_=$, следовательно, если взять $\xi = \frac{s}{\lambda} > s_0$, то действие $\frac{1}{\lambda}(e^{-sx/\lambda}F(x), \psi(\xi))$ будет определено и, в силу произвольности ψ, также будет определено действие $e^{-st}F(\lambda t)$ на любой $\varphi \in S_+$. Следовательно, $F(\lambda t)$ является оригиналом с показателем роста $s_* = \lambda s_0$. □

4. Теорема смещения.

Если $F(t) \doteqdot \mathcal{F}(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $a \in \mathbb{C}$, то $e^{-at}F(t) \doteqdot \mathcal{F}(p+a)$, $\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} a$.

Доказательство. Тот факт, что $e^{-at}F(t)$ будет являться оригиналом, доказывается аналогично предыдущему случаю. Оставим его в качестве упражнения. Имеем

$$\mathcal{L}[e^{-at}F(t)](p) = (e^{-at}F(t), e^{-pt}) =$$

(умножение на бесконечно дифференцируемую функцию)

$$= (F(t), e^{-(a+p)t}) = \mathcal{F}(p+a).$$

□

5. Теорема о дифференцировании оригинала. Если $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, то $F^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \mathcal{F}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Эту теорему достаточно доказать для $n = 1$. Имеем $\mathcal{L}[F'(t)](p) = (F'(t), e^{-pt}) =$ (правило дифференцирования обобщенной функции) $= -(F(t), (e^{-pt})'_t) = p(F(t), e^{-pt}) = p\mathcal{F}(p)$. □

6. Теорема о дифференцировании изображения.

Если $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, то $(-t)^n F(t) \risingdotseq \mathcal{F}^{(n)}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что $\mathcal{F}(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, поэтому ее можно дифференцировать по p любое количество раз, и производная

$$F^{(n)}(p) = (F(t), (-t)^n e^{-pt}).$$

□

Определение 14. Сверткой двух обобщенных функций F и G из S'_+ назовем обобщенную функцию $F * G$, действующую по правилу

$$(F * G, \varphi) = (F(x), (G(y), \varphi(x + y))), \quad \varphi \in S_+.$$

Это определение не является корректным. Из него не следует, например, важное свойство свертки — ее коммутативность, а также не указаны условия на функции F и G, при которых операция свертки определена. Однако для того, чтобы дать корректное определение свертки, пришлось бы слишком углубляться в теорию обобщенных функций, что не входит в наши планы. Поэтому примем без доказательства тот факт, что свертка коммутативна в том случае, когда она существует.

Пример 30. Из определения и свойства коммутативности свертки можно вывести симпатичное равенство: $\delta * F = F * \delta = F$.

Следующая теорема верна в предположении, что указанная в ней свертка существует.

7. Преобразование Лапласа свертки.

Если $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$ и $G(t) \risingdotseq \mathcal{G}(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, то $(F * G)(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p)$ (формула Бореля), $\mathrm{Re}\, p > s_0$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L}[(F * G)(t)](p) = ((F * G)(t), e^{-pt}) = (F(x), (G(y), e^{-p(x+y)}) \\ = (F(x)e^{-px})(G(y), e^{-py}) = \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p).$$

□

8. Преобразование Лапласа сдвига (запаздывание оригинала).

Если $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $\tau \geq 0$, то $F(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\mathcal{F}(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$.

Прежде, чем доказывать это свойство для произвольных обобщенных функций, докажем его для δ-функции. Пусть это будет

Пример 31. $\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](p) = (\delta(t-\tau), e^{-pt}) =$ (замена переменных $x = t-\tau$) $= (\delta(x), e^{-p(x+\tau)}) = e^{-p(0+\tau)} = e^{-p\tau}$.

Доказательство. Имеем $F(t-\tau) = F(t-\tau) * \delta(t) = F(t) * \delta(t-\tau)$. В силу формулы Бореля и предыдущего примера

$$\mathcal{L}[F(t-\tau)](p) = \mathcal{L}[F(t) * \delta(t-\tau)](p) = \mathcal{L}[F(t)](p)\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](p) = \mathcal{F}(p)e^{-p\tau}.$$

□

Определение 15. Первообразной порядка m для обобщенной функции $F \in S'_+$ называется обобщенная функция $\Pi \in S'_+$ такая, что $\Pi^{(m)}(t) = F(t)$. Обозначается: $\Pi(t) = F_{(m)}(t)$.

9. Преобразование Лапласа первообразной изображения.

Если $F \in S'_+$, $F(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0 \geq 0$, то $F_{(m)}(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p)/p^m$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Пример 32. Рассмотрим «обычную» функцию $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$. Она порождает регулярную обобщенную функцию $F \in S'_+$, которая действует по правилу $(F, \varphi) = \int\limits_0^\infty f(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi \in S_+$. Доопределим функцию f нулем при $t \leq 0$. Тогда f будет кусочно-гладкой функцией на $\mathbb{R}$. По теореме о связи классической и обобщенной производных (см., например, В. А. Александров «Обобщенные функции») имеем $F'(t) = f'_{\text{об}}(t) = f'_{\text{кл}}(t) + f(+0)\delta(t)$, где $f(+0)$ — правое предельное значение $f(t)$ при $t \to +0$, $f(-0) = 0$. Поэтому $(F'(t), e^{-pt}) = (f'_{\text{кл}}(t), e^{-pt}) + f(+0)(\delta(t), e^{-pt}) = (f'_{\text{кл}}(t), e^{-pt}) + f(+0) \cdot 1$ С другой стороны, по теореме о дифференцировании оригинала как обобщенной функции, имеем $(F'(t), e^{-pt}) = p(F(t), e^{-pt}) = p\mathcal{F}(p)$. Приравнивая правые части, получаем $(f'_{\text{кл}}(t), e^{-pt}) + f(+0) = p\mathcal{F}(p)$ или $\mathcal{L}[f'_{\text{кл}}](p) =$

$p\mathcal{F}(p) - f(+0)$. Таким образом, для «обычных» функций теорема о дифференцировании оригинала как обобщенной функции «выдает» нам привычную формулу, которая верна для «обычных» оригиналов.

Литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. - 512с.

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. - 304с.

[3] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. - 488с.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука. Физматлит, 1971. -256с.

[5] Ван-дер Поль Б., Бремер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.-М., ИЛ, 1952

[6] Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.- М, Физматгиз, 1974.-542 с.

[7] Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике.- М., ИЛ, 1948

[8] Кожевников Н. И., Краснощекова Т. И., Шишкин Н. Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.-М., Наука, 1964

[9] Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения.-М., Наука, 1964.-103 с.

[10] Микусинский Я. Операторное исчисление.-М., ИЛ, 1956

[11] Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.-М., Наука, 1980.-336 с.

[12] Александров В. А. Преобразование Лапласа. Методические указания. НГУ, 1992. (Шифр библиотеки НГУ — В17 П723.)

[13] Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2004.

[14] Зорич В. А. Математический анализ. Т. 2. М.: МЦНМО, 2007.

[15] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002.

[16] Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010.

[17] Привалов В. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.

[18] Романов А. С. Теория функций комплексного переменного. Записки лектора. (Интернет-ресурс: `http://phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html`)

[19] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. СПб.: Лань, 2004.

[20] Гусак А. А., Бричикова Е. А., Гусак Г. М. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. Минск: ТетраСистемс, 2002.

[21] Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. М.: Мир, 2005.

[22] Пантелеев А. В., Якимова А. С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.: Высш.шк., 2001.

[23] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

[24] Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ, 2006.

Оглавление