МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

Р. К. Бельхеева

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Новосибирск
2014

УДК 517.5
ББК В162.12
Б44

Рецензент
канд. физ.-мат. наук., доцент И. В. Подвигин

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Бельхеева, Р. К.

Б 44 Обобщенные функции в примерах и задачах : учебное пособие / Р. К. Бельхеева ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск : РИЦ НГУ, — 2014. 85 с.

ISBN 978-5-4437-0291-9

В учебном пособии излагаются основные методы решения задач по теме обобщенные функции. Пособие содержит теоретический материал, необходимый для решения задач, примеры решения типовых задач на каждую изучаемую тему, задачи для проведения практических занятий. Приведен иллюстративный материал. Имеются задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета НГУ.

УДК 517.5
ББК В162.12

ISBN 978-5-4437-0291-9

Предисловие

Понятие дельта-функции было введено в конце 20-х гг. 20-го столетия П. Дираком в его исследованиях по квантовой механике. С физической точки зрения дельта-функция представлялась Дираком как плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. В более общем смысле эта функция принимает на узком участке большие значения, причем эти значения согласованы с шириной участка.

Новое понятие функции — обобщенной функции — позволило записать точечное воздействие, сосредоточенное или приложенное в одной точке. С помощью этого понятия функции появилась возможность достаточно просто исследовать некоторые важные физические явления. Но с математической точки зрения это определение было бессмысленно, и математикам потребовалось приложить много усилий, чтобы найти математически корректное определение обобщенной функции, ее производных и операций над обобщенной функцией.

Советский математик Н. М. Гюнтер в 30–40-х гг. 20-го столетия распространил понятие функции, определенной в единственной точке, на «функцию области», что лучше соответствует физической сущности явлений. Так, например, температуру тела в точке практически определить нельзя, в то время как температура в некоторой области тела имеет конкретный физический смысл. Основы строгой математической теории обобщенных функций были построены советским математиком С. Л. Соболевым в 1936 г., впервые разработавшим теорию обобщенных функций в связи с исследованием гиперболических уравнений. В 1950–1951 гг. французский математик Л. Шварц развил теорию обобщенных функций (которые он называл распределениями), построил теорию их преобразования Фурье и указал ряд важных приложений этой теории.

Обобщенные функции расширяют возможности классического математического анализа, поэтому использование техники обобщенных функций существенно расширяет круг рассматриваемых в механике и физике задач и приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции. В настоящее время эта теория нашла применения почти во всех областях математики и ее приложений, физике и других областях естествознания. Например, в механике приходится рассматривать задачи о столкновении тел или о резком ударе. При ударе на тело действует кратковременная, но очень большая сила. В большинстве случаев детализация зависимости силы от времени в момент самого соударения не представляет интереса. Достаточно знать импульс силы, тогда саму силу можно записать как произведение импульса на дельта-функцию. Теория обобщенных функций позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Отметим, что дельта-функция рассматривается лишь для вещественных значений независимой переменной.

1. Пространства основных и обобщенных функций

Определение. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$. *Носителем* функции φ называется замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек $x \in G$, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Другими словами, точка $x \in G$ принадлежит носителю функции φ, если найдется последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ точек из G, сходящаяся к x и такая, что $\varphi(x_n) \neq 0$ для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Носитель функции φ обозначается через $supp\,\varphi$ (от англ. *support*).

Определение. Функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ называется *основной*, или *пробной*, если φ бесконечно дифференцируема и $supp\,\varphi$ является ограниченным подмножеством в G.

Согласно теореме Лебега, известной из курса математического анализа, множество в $\mathbb{R}^n$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено. Поэтому можно сказать, что носитель основной функции является компактным подмножеством ее области определения G. Отметим также, что носитель основной функции не пересекается с границей области G.

Резюмируем: $\varphi : G \to \mathbb{C}$ — основная функция (G — открытое множество), если
1) φ бесконечно дифференцируема;
2) носитель $supp\,\varphi$ — компактное подмножество в G;
3) $supp\,\varphi \cap \partial G = \varnothing$. (Хотя из 2 следует 3, выделим это пункт как отдельный для большей ясности.)

Очевидно, что сумма двух основных функций и произведение основной функции на число снова являются основными функциями. Поэтому совокупность всех основных функций, определенных в данной области G, является векторным пространством, которое обозначают через $\mathcal{D}(G)$.

Определение. Говорят, что последовательность основных функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots$ *сходится* к функции

$\varphi \in \mathcal{D}(G)$, если 1) существует ограниченное в $\mathbb{R}^n$ замкнутое подмножество M множества G, содержащее носитель каждой функции φ_n, и 2) для каждого мультииндекса α последовательность производных $D^\alpha\varphi_1$, $D^\alpha\varphi_2$, $\dots$, $D^\alpha\varphi_n$, $\dots$ равномерно в G сходится к $D^\alpha\varphi$. Другими словами, последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, если 1) существует ограниченное в $\mathbb{R}^n$ замкнутое подмножество M множества G такое, что носители $supp\,\varphi_n \subset M$ для каждого n, и 2) для каждого мультииндекса α

$$\sup_{x\in G}|D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Это определение нуждается в пояснении. В курсе математического анализа мы считали, что последовательность функций f_1, f_2, $\dots$, f_n, $\dots$ сходится равномерно к функции f, если модуль разности $|f(x) - f_n(x)|$ мал для всех значений x, для которых задаются функции. В этом смысле последовательность синусообразных функций f_n, графики которых изображены на рис. 1 (a), сходится к функции f. Кривые, изображенные на рис. 1 (a), близки в смысле близости нулевого порядка, но не близки в смысле близости первого порядка, так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. Кривые, изображенные на рис. 1 (b), близки в смысле близости первого порядка, так как для них малы

1) модули разностей функций $|f(x) - f_n(x)|$ и

2) модули разностей производных $|f'(x) - f_n'(x)|$.

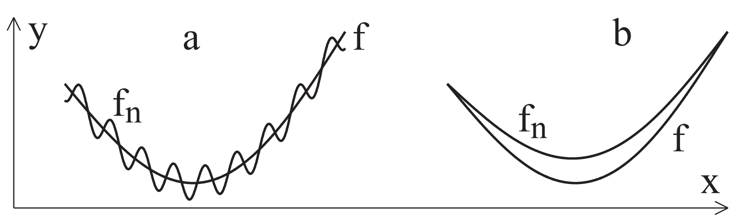

Рис. 1. Пояснения к определению сходимости функций

Основные же функции близки в смысле близости бесконечного порядка, так как для них малы $|\varphi(x)-\varphi_n(x)|$, $|\varphi'(x)-\varphi_n'(x)|, \cdots, |\varphi^{(n)}(x)-\varphi_n^{(n)}(x)|, \cdots$ для всех значений x, для которых задаются функции.

Пример 1. Покажем, что функция

$$\psi(x)=\frac{1}{x^m}\left[\varphi(x)-\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right], \quad m=1,2,\ldots,$$

— основная, где $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\eta(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\eta\equiv 1$ в окрестности $x=0$.

Доказательство. Очевидно, что функция $\psi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема при $x\neq 0$. Покажем, что $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x=0$. Пусть $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$. Тогда $\eta(x)=1$. Обозначив

$$\mu(x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

получим:

$$\psi(0)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\mu(x)}{x^m}=\frac{\mu^{(m)}(0)}{m!},$$

$$\psi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mu(x)-\dfrac{x^m\mu^{(m)}(0)}{m!}}{x^{m+1}}=\frac{\mu^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$$

и т. д. Таким образом, $\psi(x)\in C^\infty$ и, значит, $\psi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Определение. Всякое отображение $F:\mathcal{D}(G)\to\mathbb{C}$ пространства основных функций во множество комплексных чисел называется *функционалом.*

Определение. Функционал F называется *линейным*, если для любых $a,\ b \in \mathbb{C}$ и любых основных функций φ_1 и φ_2 выполняется равенство $F(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aF(\varphi_1) + bF(\varphi_2)$.

Определение. Функционал F называется *непрерывным*, если для любой последовательности основных функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots,$ сходящейся к какой-нибудь функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, числовая последовательность $F(\varphi_1),\ F(\varphi_2),\ \ldots,\ F(\varphi_n),\ \ldots$ сходится к числу $F(\varphi)$.

Определение. *Обобщенной* функцией называется линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Совокупность всех обобщенных функций на G образует линейное пространство относительно естественных операций сложения и умножения на число и обозначается через $\mathcal{D}'(G)$. Значение обобщенной функции F на основной функции φ мы будем обозначать либо через $F(\varphi)$, либо через (F, φ).

1.1. Примеры обобщенных функций

Напомним, что функция f называется *локально интегрируемой* (пишем $f \in L_{1,loc}(G)$), если у каждой точки x_0 из G существует окрестность $U(x_0)$ такая, что интеграл $\int\limits_{U(x_0)} |f(x)|dx$ конечен.

Каждая «обычная» функция $f \in L_{1,loc(G)}$ порождает обобщенную функцию по правилу

$$(f, \varphi) = \int\limits_G f(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (1)$$

Пример 2. Докажем, что если f является локально интегрируемой функцией, то функционал (1) является обобщенной функцией на $\mathcal{D}(G)$.

Доказательство. Рассмотрим одномерный случай $G \subset \mathbb{R}$. Показав, что интеграл, определяемый равенством

(1), а) существует; б) линеен; в) непрерывен, мы докажем, что он задает обобщенную функцию.

Интеграл, определяемый равенством (1), сходится (существует и конечен) для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$: если $\varphi \in \mathcal{D}$, то существует отрезок $[a;b] \supset supp\, \varphi$, причем по теореме Вейерштрасса функция φ, будучи непрерывной, ограничена на $[a;b]$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leq M$. Поэтому на $[a;b]$ верно неравенство $|f(x)\varphi(x)| \leq M|f(x)|$, а значит, интеграл

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)|\, dx \ \leq M \int_a^b |f(x)|\, dx$$

сходится, так как f является локально интегрируемой функцией. Для всех x, лежащих вне отрезка $[a;b]$, имеем $|f(x)\varphi(x)| = 0$, поэтому

$$\int_G |f(x)\varphi(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|\, dx \leq M \int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Следовательно, он абсолютно, а потому и просто, сходится. Таким образом, интеграл существует.

Линейность функционала (1) следует из линейности интеграла. Докажем непрерывность этого функционала. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в $\mathcal{D}$. Тогда существует такой отрезок $[a;b]$, что для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$ имеют место включения $supp\, \varphi_n \subset [a;b]$ и $supp\, \varphi \subset [a;b]$. Следовательно, в силу равномерной сходимости $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ при $n \to +\infty$, имеем

$$|(f,\varphi) - (f,\varphi_n)| \leq \int_G |f(x)|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\, dx =$$

$$=\int_a^b |f(x)||\varphi(x)-\varphi_n(x)|\, dx \leq \sup_{x\in[a;b]} |\varphi(x)-\varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)|\, dx \to 0.$$

Таким образом, мы доказали существование, линейность и непрерывность функционала, задаваемого формулой (1), следовательно, он является обобщенной функцией.

Определение. Обобщенная функция F называется *регулярной*, если для нее найдется «обычная» функция $f \in L_{1,loc}(G)$, которая порождает F по формуле (1).

Определение. Обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется *сингулярной*.

Приведем примеры наиболее важных сингулярных обобщенных функций.

Пример 3 (современное определение δ-функции Дирака). Зададим функционал $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ с помощью формулы

$$\delta(\varphi) = \varphi(0). \tag{2}$$

Линейность и непрерывность функционала, заданного такой формулой, очевидны. Покажем, что функционал, заданный формулой (2), нельзя представить в виде (1) ни при какой локально интегрируемой функции f.

Действительно, рассмотрим для простоты одномерный случай и предположим, что для некоторой локально интегрируемой функции f и любой основной функции φ имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Взяв в качестве основной функцию φ, задаваемую равенством

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geq a, \end{cases}$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \qquad (3)$$

Но в силу непрерывности интеграла Лебега

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0.$$

Так как при $|x| < a$ выполняется $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \dfrac{1}{e}$, то

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx\right| \le \frac{1}{e}\int\limits_{-a}^{a} |f(x)|\,dx,$$

поэтому левая часть равенства (3) при $a \to 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пример 4. Сингулярная обобщенная функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ задается следующим образом:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

где интеграл в смысле главного значения (valeur principale) вычисляется по формуле

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to +0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Обобщенная функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ есть продолжение регулярной обобщенной функции $\dfrac{1}{x}$ с множества $x \neq 0$ на всю ось $\mathbb{R}$. Отметим, что $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ совпадает с локально интегрируемой функцией $\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, т. е. для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ $(\mathcal{P}\dfrac{1}{x}, \varphi) = \left(\dfrac{1}{x}, \varphi\right)$.

Покажем, что для всякой основной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx. \tag{4}$$

Доказательство. Так как φ является основной функцией, то $\exists R > 0 :\ supp\, \varphi \in [-R; R]$. Рассмотрим интеграл, стоящий в левой части уравнения,

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Особыми точками для этого интеграла $-\infty$ и $+\infty$ не являются, так как основная функция φ зануляется вне промежутка $[-R; R]$, поэтому

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Но $x = 0$ будет особой точкой для подынтегральной функции $\dfrac{\varphi(x)}{x}$, следовательно, интеграл в смысле главного значения будет иметь вид

$$v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right]. \tag{5}$$

Докажем вспомогательное равенство

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Для этого в интеграле, стоящем в левой части равенства, сделаем замену переменной $x = -t$, тогда

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt,$$

что и доказывает вспомогательное равенство.

Преобразуем первый интеграл, стоящий в правой части равенства (5): к числителю подынтегральной функции добавим $\varphi(0) - \varphi(0)$ и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right].$$

Воспользовавшись вспомогательным равенством, получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right] =$$

$$= v.p.\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Последнее равенство следует из определения интеграла в смысле главного значения.

Итак, левую часть равенства (4) мы привели к виду

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx. \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в правой части равенства (4),

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

Основная функция $\varphi(x)$ зануляется вне промежутка $[-R; R]$, но функция $\varphi(x) - \varphi(0)$ не зануляется вне этого промежутка, поэтому интеграл имеет особенности в $-\infty$ и $+\infty$. Точка $x = 0$ не будет особой для подынтегральной функции

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x},$$

так как

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \to \varphi'(0) \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, интеграл в смысле главного значения будет иметь вид

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{-a}^{+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left[- \int\limits_{-a}^{-R} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx - \int\limits_{R}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx \right].$$

Здесь $a > R$, и мы воспользовались тем, что $\varphi(x) = 0$ при $x > R$. Используя вспомогательное равенство, имеем

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\int_R^a \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - \int_R^a \frac{\varphi(0)}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = v.p.\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Таким образом, правую часть равенства (4) мы привели к виду

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = v.p.\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx. \qquad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), убеждаемся в справедливости равенства (4).

Пример 5. Приведем еще две сингулярные обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, соответствующие выбору либо верхнего, либо нижнего знака, по формуле

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx.$$

Формула Сохоцкого связывает последние функции с δ-функцией Дирака и функцией $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ следующим образом:

$$\frac{1}{x \pm i\,0} = \mp i\pi\,\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

1.2. Дельта-образные последовательности

Дирак ввел понятие дельта-функции одной вещественной переменной как «функции», для которой выполняются следующие равенства:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x = 0, \\ \\ \quad 0, & \text{если} \quad x \neq 0; \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Т. е. эта функция не равна нулю только в точке $x = 0$, где она обращается в бесконечность таким образом, чтобы ее интеграл по любой окрестности $x = 0$ был равен 1. Графически ее можно представить следующим образом (рис. 2).

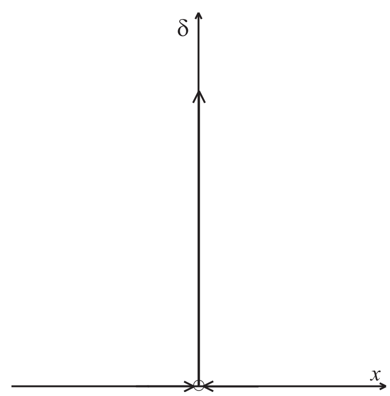

Рис. 2. График дельта-функции Дирака $\delta(x)$

Такое определение дельта-функции является некорректным с точки зрения математики, и мы будем смотреть на дельта-функцию как на предел дельта-образных последовательностей.

Определение. Говорят, что последовательность $h_1, \ldots, h_k, \ldots$ вещественно-значных функций, определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, является *δ-образной*, если

(1) для каждого $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема в $\mathbb{R}^n$;

(2) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $h_k(x) \geq 0$;

(3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует положительное число ε_k такое, что $h_k(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > \varepsilon_k$, причем $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$;

(4) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(x) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Дельта-образных последовательностей существует бесконечно много. Каждую из них можно использовать для записи точечного воздействия, сосредоточенной силы (или сосредоточенного момента), приложенной в одной точке.

Пример 6. Примером дельта-образной последовательности может служить следующая последовательность функций, график которой приведен на рис. 3,

$$h_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon_k}, & \text{если } | x |\leq \varepsilon_k, \\[2ex] 0, & \text{если } | x |> \varepsilon_k. \end{cases}$$

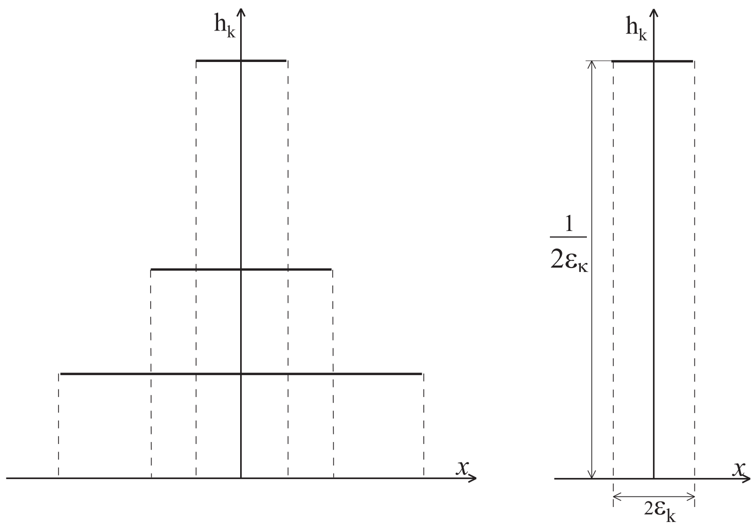

Рис. 3. График дельта-образной последовательности $h_k(x)$

В примерах 7–10 докажем, что пределами указанных функций в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ является дельта-функция.

Пример 7.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Доказательство. Покажем, что предел функции $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ при $\varepsilon \to +0$ действует на основную функцию $\varphi(x)$ так же, как дельта-функция Дирака $\delta(x)$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

При фиксированных значениях аргумента x ($x \neq 0$) функция $f_\varepsilon(x) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. При $x = 0$ функция $f_\varepsilon(x) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$. На рис. 4 приведены графики функции $f_\varepsilon(x)$ при различных значениях ε, кривые с меньшим значением ε отмечены бо́льшим номером.

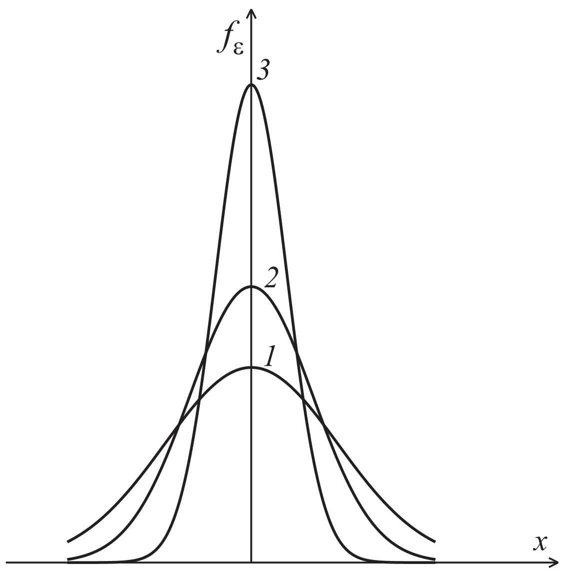

Рис. 4. График функции $f(x)$

Функция $f_\varepsilon(x)$ является непрерывной, следовательно, локально интегрируемой, поэтому она порождает регулярную обобщенную функцию по правилу

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x)\, dx.$$

Выполним в интеграле замену переменной $t = \dfrac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Пределы интегрирования не изменятся, а интеграл примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}t) 2\sqrt{\varepsilon}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\, dt.$$

Оценим подынтегральную функцию

$$\left|e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\right| \leq \left|\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\right| e^{-t^2}.$$

Так как функция $\varphi(x)$ является основной (т. е. бесконечно дифференцируемой на компакте), то она ограничена, следовательно, существует положительная константа M: $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $|\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)| \leq M$. Значит,

$$\left|e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\right| \leq Me^{-t^2},$$

и для интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)t\,dt,$$

зависящего от параметра ε, можно выполнить предельный переход, так как для него существует интегрируемая мажоранта

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(\lim_{\varepsilon\to+0}2\sqrt{\varepsilon}t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(0)\,dt = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Здесь мы воспользовались известным интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Обратим внимание на то, что последовательность $f_{\varepsilon_k}(x)$ отличается от δ-образной последовательности $h_k(x)$, приведенной в примере 6, тем, что не зануляется вне некоторого отрезка.

Пример 8.

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \pm\delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \pm 0.$$

Доказательство. Покажем, что при $\varepsilon \to +0$ предел функции $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ действует на основную функцию $\varphi(x)$ так же, как дельта-функция Дирака $\delta(x)$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

На рис. 5 приведены графики функций $f_{\varepsilon_k}(x)$ при различных значениях ε ($\varepsilon_2 = \varepsilon_1/2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/2$), рядом с кривыми поставлены соответствующие номера. При фиксированных значениях аргумента x ($x \neq 0$) функция $f_\varepsilon(x) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Для $x = 0$ функция $f_\varepsilon(x) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$.

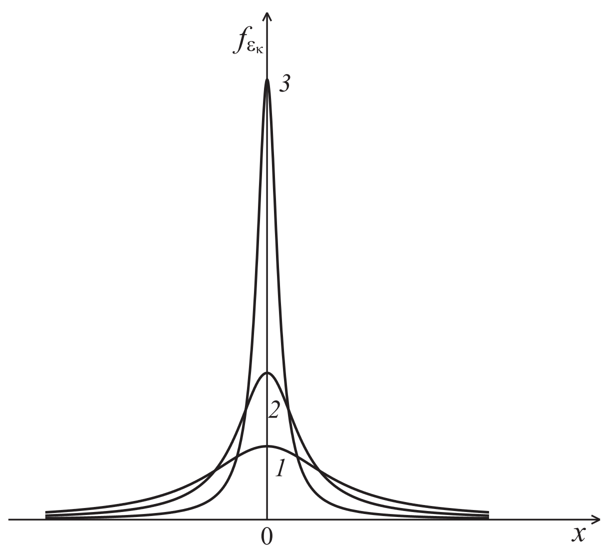

Рис. 5. Графики функций $f_{\varepsilon_k}(x)$

Функция $f_\varepsilon(x)$ является непрерывной, следовательно, локально интегрируемой, поэтому она порождает регулярную обобщенную функцию по правилу

$$F(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1}\,\varphi(x)\,d\,\frac{x}{\varepsilon}.$$

Выполним в интеграле замену переменной $t = \dfrac{x}{\varepsilon}$. Пределы интегрирования при $\varepsilon > 0$ не изменятся, а интеграл примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1}\,\varphi(x)\,d\frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\varphi(t\varepsilon)\,dt.$$

Оценим подынтегральную функцию

$$\left|\frac{1}{t^2+1}\varphi(\varepsilon t)\right| \leq M\frac{1}{t^2+1}.$$

Выше мы уже установили, что основная функция является ограниченной и, следовательно, $|\varphi| \leq M$. Подынтегральная функция абсолютно интегрируема, следовательно, можно выполнить предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\varphi(t\varepsilon)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(t\varepsilon)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\varphi(0)\,dt = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Здесь мы воспользовались интегралом $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \pi$. Если $\varepsilon < 0$, то при замене переменной в интеграле пределы интегрирования изменят знаки на противоположные, поэтому получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1}\,\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\varphi(t\varepsilon)\,dt \to -\varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to -0.$$

Пример 9.

$$\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \to \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Доказательство. Покажем, что при $\varepsilon \to +0$ предел функции $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$, график которой приведен на рис. 6,

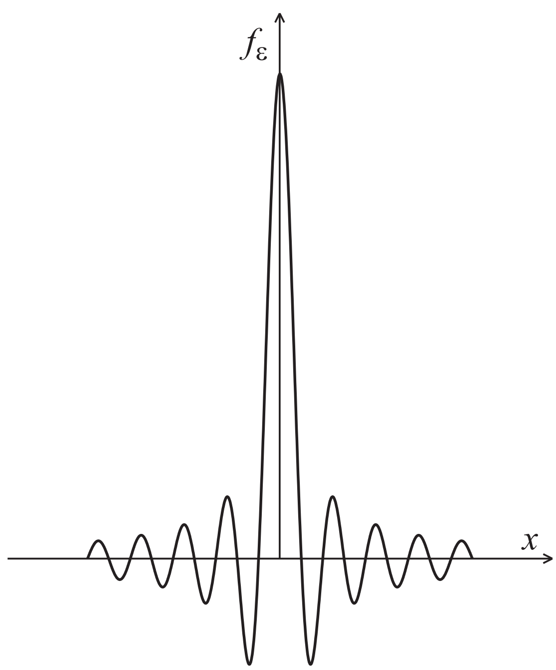

Рис. 6. График функций $f_\varepsilon(x)$

действует на основную функцию так же, как δ-функция, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\varphi(x)\right)=(\delta(x),\varphi(x)).$$

Так как $\dfrac{1}{\pi x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}\to\dfrac{\varepsilon}{\pi}$ при фиксированном ε и $x\to 0$, то функция $\dfrac{1}{\pi x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$ является непрерывной, ограниченной и, следовательно, локально интегрируемой. Поэтому она порождает регулярную обобщенную функцию по правилу

$$(f_\varepsilon(x),\varphi(x))=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{x}{\varepsilon}}{x}\varphi(x)\,dx.$$

Убедимся, что предел этого интеграла равен $\varphi(0)$ при $\varepsilon\to+0$. К числителю подынтегральной функции добавим $\varphi(0)$ и $-\varphi(0)$ и, используя то, что для каждой основной функции существует число $R>0$, такое что для всех $|x|>R$ $\varphi(x)=0$, совершим преобразования

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(0)}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл: подынтегральная функция имеет особенность при $x=0$, но

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\to\varphi'(0)\quad\text{при}\quad x\to 0.$$

Функции $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ пробные, а значит, функция $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ абсолютно интегрируема на $[-R;R]$.

Применив *лемму Римана-Лебега*, утверждающую, что если функция f интегрируема на промежутке $[a,b]$, то

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin px\,dx = 0,$$

убеждаемся:

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

В первом интеграле выполним замену переменной $t=\dfrac{x}{\varepsilon}$. Используя известный интеграл Дирихле $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\pi$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(0)}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int\limits_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon}\frac{\sin t}{t}\,dt \to \varphi(0)$$

при $\varepsilon\to+0$. Таким образом, мы убедились, что предел функции $\dfrac{1}{\pi x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$ при $\varepsilon\to+0$ является δ-функцией.

Обратим внимание на то, что последовательность

$$f_{\varepsilon_k}(x)=\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon_k},$$

в отличие от δ-образной последовательности $h_k(x)$, не зануляется для $|x|>\varepsilon_k$ и принимает отрицательные значения.

Дельта-образные последовательности такого вида расширяют представление о δ-функции.

Пример 10.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos xy\, dy = \delta(x).$$

Доказательство. Запишем несобственный интеграл как предел

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{A} \cos xy\, dy = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{\sin xy}{x}\right|_{y=0}^{y=A} = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\frac{\sin Ax}{x}.$$

Функция $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin Ax}{x}$ является локально интегрируемой, следовательно, она порождает регулярную обобщенную функцию

$$\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin Ax}{x}, \varphi(x)\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Ax}{x}\varphi(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t/A}\varphi\left(\frac{t}{A}\right)\frac{dt}{A} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi\left(\frac{t}{A}\right)\, dt.$$

(В интеграле выполнили замену переменной $t = Ax$.) Так как функция φ пробная, то существует положительное число R такое, что $supp\,\varphi(x) \subset [-R; R]$ и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi\left(\frac{t}{A}\right)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin t}{t}\varphi\left(\frac{t}{A}\right)\, dt.$$

Поскольку подынтегральная функция ограничена константой, независящей от A, то можно совершить предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin Ax}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi\left(\frac{t}{A}\right)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi \left(\lim_{A \to +\infty} \frac{t}{A} \right) dt = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \varphi(0).$$

Мы воспользовались известным интегралом Дирихле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi.$$

Пример 11. Найдите пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ последовательностей функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ и $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$, если

$$f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2} \quad \text{и} \quad F_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_k(t)\, dt.$$

Решение. Выполнив замену $k = \dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, сведем задачу вычисления предела первой последовательности к пределу, найденному в примере 7,

$$\lim_{k \to +\infty} f_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} = \delta(x).$$

Вычислим предел второй последовательности. Интеграл, зависящий от параметра $F_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_k(t)\, dt$, задает непрерывную ограниченную функцию. Следовательно, $F_k(x)$ порождает регулярную обобщенную функцию. Выполнив замену $z = kt$, получим

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 t^2}\, dt \right] \varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{k\cdot x} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \frac{z^2}{k^2}} \, d\frac{z}{k} \right] \varphi(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_k(x)\varphi(x)\, dx,$$

где $I_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{k\cdot x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\, dz$. Зависящий от параметра интеграл $I_k(x)$ при $k \to +\infty$ равен

$$I(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\, dz = 0, & \text{если} \quad x < 0, \\[2ex] \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \\[2ex] \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\, dz = 1, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

т. е. $I(x) = H(x)$, где $H(x)$ — функция Хевисайда, задаваемая соотношением

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

(Мы никак не определяем эту функцию в нуле, так как будем трактовать ее как обобщенную регулярную функцию.)

Итак, мы можем заключить, что $\int\limits_{-\infty}^{x} \delta(x)\, dx = H(x)$.

2. Замена переменных в обобщенных функциях

Если $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и b — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, то для произвольной обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определим новую обобщенную функцию $F(Ax+b)$, которая действует на произвольную пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(F(Ax+b), \varphi(x)) = \left(F(y), \frac{\varphi\left(A^{-1}(y-b)\right)}{|detA|}\right).$$

При этом будем говорить, что $F(Ax+b)$ получена из F *линейной заменой переменных.*

Нелинейную замену мы будем рассматривать только применительно к одномерной δ-функции.

Теорема. Пусть функция $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и имеет только простые нули $x_1,\ x_2,\ \ldots$ (напомним, что число y называется простым нулем функции a, если $a(y) = 0$, но $a'(y) \neq 0$). Тогда справедливо равенство

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}.$$

Пример 12. Покажем, что а) δ-функция является четной функцией и б) $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$.

Решение. Пункт а) следует из вычисления

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(y), \varphi(-y)) = \varphi(-0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Для доказательства б) выполним замену переменной $y = x - x_0$:

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(y), \varphi(y + x_0)) = \varphi(x_0).$$

Функцию $\delta(x - x_0)$ называют «сдвинутой» δ-функцией.

В примерах 13–15, считая a вещественным числом, отличным от нуля, докажем равенства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Пример 13. Покажем, что $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$.

Доказательство. Здесь непрерывно дифференцируемой функцией с простым нулем $x = 0$ является функция $a(x) = a \cdot x$, $a'(0) = a$. Согласно теореме о замене переменной имеем

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}.$$

Пример 14. Покажем, что

$$\delta(\sin ax) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x + \frac{\pi k}{a})}{|a|}.$$

Доказательство. Простыми нулями непрерывно дифференцируемой функции $a(x) = \sin ax$ являются

$$x_k = \frac{\pi k}{a}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

$$a'\left(\frac{\pi k}{a}\right) = a \cos a \frac{\pi k}{a} = a \cdot (-1)^k \neq 0.$$

Применяя теорему, имеем

$$\delta(\sin ax) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x + \frac{\pi k}{a})}{|a|}.$$

3. Операции над обобщенными функциями

Мы познакомились с новым видом функций — обобщенными функциями. Изучим теперь, как производить математические операции над обобщенными функциями. Общее правило такое: действие с обобщенной функции по некоторому правилу переносится на пробную функцию.

3.1. Умножение обобщенных функций на бесконечно дифференцируемые функции

Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$ $a : G \to \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемая функция. Произведением обобщенной функции F на бесконечно дифференцируемую функцию a называется новая обобщенная функция aF, действующая на произвольную основную функцию φ по правилу $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$.

Пример 15. Произведение δ-функции на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x) : a(x)\,\delta(x) = a(0)\,\delta(x)$.

Решение. В самом деле, для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ мы имеем

$$(a(x)\,\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\,\varphi(x)) = a(0)\,\varphi(0) =$$

$$= (a(0)\,\delta(x), \varphi(x)).$$

Пример 16. Докажем равенство $x \cdot \dfrac{1}{x \pm i\,0} = 1$.

Решение. Подействуем на основную функцию $\varphi(x)$ функцией $x \cdot \dfrac{1}{x \pm i\,0}$, перенесем операцию умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x) = x$ с обобщенной функции по заданному правилу на основную функцию и воспользуемся формулами Сохоцкого и определением сингулярной функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$:

$$\left(x\frac{1}{x \pm i\,0}, \varphi(x)\right) = (\mp i\pi\,\delta, x\,\varphi(x)) + \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\,\varphi(x)\right).$$

Первая обобщенная функция в правой части равенства занулится, так как

$$(\mp i\pi\,\delta, x\,\varphi(x)) = (\delta, \mp i\pi\, x\,\varphi(x)) = \mp i\pi \cdot 0 \cdot \varphi(0) = 0.$$

Действуя функцией $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ на основную функцию $x\,\varphi(x)$, получаем

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\,\varphi(x)\right) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\varphi(x)}{x}\,dx = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x)\,dx = (1, \varphi(x)).$$

Итак, мы убедились, что обобщенная функция $x \cdot \dfrac{1}{x \pm i\,0}$ действует на основную функцию так же, как обобщенная функция 1.

Замечание. Если бы мы решали уравнение $x \cdot F(x) = 1$ для обычных функций, то для всех $x \neq 0$ мы бы получили единственное решение $F(x) = \dfrac{1}{x}$. Приведенный пример показал, что в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(G)$ уравнение $x \cdot F(x) = 1$ имеет несколько линейно независимых решений

$$F(x) = \frac{1}{x + i\,0}; \quad \frac{1}{x - i\,0}; \quad \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

и бесконечно много линейных комбинаций

$$F(x) = \frac{c_1}{x+i\,0} + \frac{c_2}{x-i\,0} + c_3\mathcal{P}\frac{1}{x} + c_4\,\delta(x), \quad \sum_{i=1}^{3} c_i = 1,$$

каждая из которых является решением этого уравнения.

Пример 17. Докажем, что для любого натурального m в пространстве $\mathcal{D}'(G)$ справедливо равенство

$$x^m\mathcal{P}\frac{1}{x} = x^{m-1}.$$

Решение. Подействуем на основную функцию $\varphi(x)$ функцией $x^m\mathcal{P}\frac{1}{x}$, перенесем операцию умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x) = x^m$ с обобщенной функции на основную функцию и воспользуемся определениями сингулярной функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$:

$$\left(x^m\,\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x^m\,\varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m\,\varphi(x)}{x}\,dx =$$

$$= v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{m-1}\cdot\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{m-1}\cdot\varphi(x)\,dx = (x^{m-1}, \varphi(x)).$$

Тем самым мы убедились, что обобщенная функция $x^m\,\mathcal{P}\frac{1}{x}$ действует на основную функцию так же, как обобщенная функция x^{m-1}.

3.2. Дифференцирование обобщенных функций. Теорема о связи классической и обобщенной производных

Определение. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ и α — некоторый мультииндекс. *Производной* порядка α обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(G)$ называется новая обобщенная функция $D^\alpha F$, которая действует на любую основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по правилу $(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha \varphi)$.

Пример 18. Производная одномерной δ-функции сопоставляет пробной функции минус значение ее производной в нуле.

Решение. В самом деле,
$(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$.

Дифференцируя по x дельта-образную последовательность (и похожую на нее), будем получать последовательности, сходящиеся к производным от дельта-функции. Например, дифференцируя семейство

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \pm\delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \pm 0,$$

приведенное в примере 8, получим

$$f'_\varepsilon(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} \to \pm\delta'(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \pm 0.$$

На рис. 7 представлен график стоящей слева функции, иллюстрирующий график производной от дельта-функции. Обозначения на рис. 7 аналогичны обозначениям на рис. 5. Обобщенная функция $\delta'(x)$ имеет еще более «острую» особенность, чем $\delta(x)$, причем принимает значения обоих знаков.

Аналогично $(\delta^{(k)}(x), \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$.

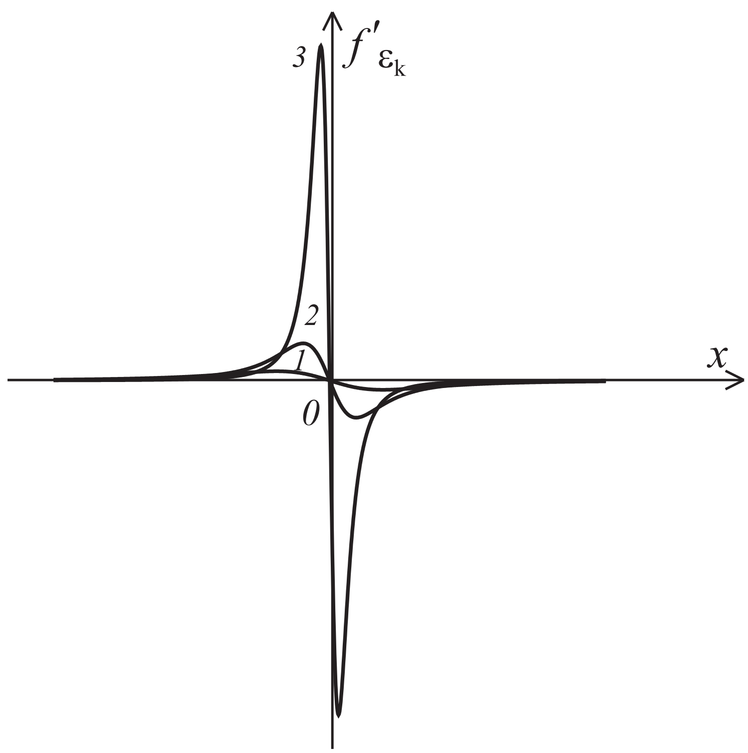

Рис. 7. Графики функций $f'_{\varepsilon_k}(x)$

Пример 19. Производная функции Хевисайда $H(x)$ равна δ-функции, т. е. $H'(x) = \delta(x)$.

Решение.

$$(H'(x), \varphi(x)) = -(H(x), \varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Определение. Функцию $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называеть *кусочно-гладкой*, если она является кусочно-гладкой в смысле теории рядов Фурье на любом конечном промежутке $[a, b]$, т. е. если в $[a, b]$ найдется конечное число точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < < x_n = b$ таких, что в каждом открытом промежутке (x_j, x_{j+1}) функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j у f существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_j - 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j + h),$$

а также существуют и конечны следующие пределы, похожие на левую и правую производные

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}.$$

Теорема (о связи классической и обобщенной производных кусочно-гладкой функции). Для всякой кусочно-гладкой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$f'_{\text{об}} = f'_{\text{кл}} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k), \tag{8}$$

где *скачок* функции f определяется так:

$$[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0) = \lim_{h \to +0} f(x_k + h) - \lim_{h \to +0} f(x_k - h).$$

Пример 20. Докажем равенство $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.

Доказательство. Подействуем обобщенной функцией $\delta'(-x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$. Наблюдаем сочетание двух операций: замены переменной $y = -x$ и дифференцирования обобщенной функции. Сначала совершим замену переменной, а затем возьмем производную

$$(\delta'(-x), \varphi(x)) = (\delta'(y), \varphi(-y)) = -(\delta(y), (\varphi(-y))') =$$

$$= -(\delta(y), -\varphi'(-y)) = \varphi'(0). \qquad (9)$$

Производную функции $(\varphi(-y))'$ вычисляем по правилу дифференцирования сложной функции

$$(\varphi(-y))' = \varphi'(-y) \cdot (-y)' = -\varphi'(-y).$$

Теперь подействуем на пробную функцию $\varphi(x)$ обобщенной функцией $-\delta'(x)$ и получим

$$(-\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi'(x)) = \varphi'(0). \qquad (10)$$

Сравнивая правые части равенств (9) и (10), заключаем

$$\delta'(-x) = -\delta'(x).$$

Пример 21. Докажем равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Доказательство. Изучив тему «Ряды Фурье», мы научились представлять кусочно-гладкие функции рядами Фурье. Поэтому легко можем показать, что ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

сходится к функции $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$ и продолженной с периодом 2π на всю ось. Продолженная функция $\tilde{f}$ терпит разрывы первого рода в точках $x = 2\pi k$, $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \dots$. Формально почленно продифференцировав исходный ряд, получим повсюду расходящийся ряд

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots .$$

В [9] показано, что частичные суммы ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ по абсолютной величине равномерно ограничены числом $\dfrac{\pi}{2} + 1$.

Также в [9] доказано **утверждение**, принадлежащее **Фату**: если в точке x существует конечная производная $f'(x)$, то ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

полученный почленным дифференцированием ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x),$$

суммируем по методу Пуассона-Абеля и именно к сумме $f'(x)$.

Более того, эта теорема может быть обобщена на случай повторного дифференцирования, если в точке x существует конечная производная $f^{(m)}(x)$, $m > 1$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k} = \dfrac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$ можно почленно дифференцировать и сумма ряда, составленного из производных, равна производной от суммы первоначального ряда $(\tilde{f})'$. Продолженная функция $\tilde{f}$ терпит разрывы первого рода в точках $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, поэтому по правилу дифференцирования кусочно-гладкой функции получаем

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Пользуясь формулами Эйлера для выражения косинусов, получаем равенство

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + e^{-ix} + e^{-i2x} + \ldots = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k)$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Пример 22. Найдем предел в $\mathcal{D}'(G)$

$$\frac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{h} \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Решение. Подействуем на пробную функцию $\varphi(x)$ обобщенной функцией $\dfrac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{h}$. В силу линейности имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(\delta(x+h),\varphi(x))-(\delta(x-h),\varphi(x))\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(0-h)-\varphi(0+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h}-\frac{\varphi(0-h)-\varphi(0)}{-h}\right]=$$

$$=-2\,\varphi'(0).$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования обобщенной функции, перенесем действие на обобщенную функцию и получим $-2\,\varphi'(0)=2(\delta'(x),\varphi(x))$.

Таким образом, при $h \to 0$

$$\left(\frac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{h},\varphi(x)\right)=2(\delta'(x),\varphi(x)).$$

Пример 23. Докажем, что в $\mathcal{D}'(G)$ для любых натуральных k и m справедливы равенства

$$x^k\delta^{(m)}(x)=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{m!}{(m-k)!}\delta^{(m-k)}, & \text{если} \quad 0\le k\le m,\\[2ex] 0, & \text{если} \quad k>m.\end{cases}$$

В частности, проверим равенство $x\delta'(x)=-\delta(x)$.

Доказательство. Напомним *формулу Лейбница* дифференцирования произведения n раз дифференцируемых функций f и g

$$(f \cdot g)^{(n)}\Big|_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0);$$

производная порядка $n \le k$ монома x^k вычисляется по формуле

$$(x^k)^{(n)} = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot x^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!} \cdot x^{k-n}.$$

Воспользуемся правилами умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и дифференцирования для обобщенной функции

$$(x^k \delta^{(m)}(x), \varphi(x)) = (\delta^{(m)}(x), x^k \varphi(x)) =$$

$$= (-1)^m (\delta(x), (x^k \varphi(x))^{(m)}) =$$

$$= (-1)^m \left(\delta(x), \sum_{n=0}^{m} C_m^n (x^k)^{(n)} (\varphi(x))^{(m-n)} \right) =$$

$$= (-1)^m \left(\delta(x), \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} (x^k)^{(n)} (\varphi(x))^{(m-n)} \right).$$

В сумме

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} (x^k)^{(n)}$$

будут равны нулю те слагаемые, для которых $n > k$.

Для всех $n < k$ при действии δ-функции на пробную функцию $x^{(k-n)}\varphi(x)$ имеем

$$(\delta(x), x^{(k-n)}\varphi(x)) = 0 \cdot \varphi(0) = 0.$$

Следовательно, в сумме не равно нулю только одно слагаемое с индексом $n = k$, а значит, мы получаем

$$(-1)^m \left(\delta(x), \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} (x^k)^{(n)} (\varphi(x))^{(m-n)}\right) =$$

$$= (-1)^m \left(\delta(x), \frac{m!}{k!(m-k)!} \varphi^{(m-k)}(x)\right) =$$

$$= (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} (\delta^{(m-k)}(x), \varphi(x)).$$

В последнем действии мы перенесли операцию дифференцирования с пробной функции на δ-функцию.

Равенство $x\delta'(x) = -\delta(x)$ проверяется простой подстановкой значения $k = 1$ в полученную формулу.

Пример 24. Докажем, что обобщенные функции $\delta,\ \delta',\ \delta'',\ \ldots,\ \delta^{(k)}$ линейно независимы.

Доказательство. Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках, но при наводящих соображениях для наглядности будем относиться к обобщенным функциям как к обычным функциям. Сначала докажем линейную независимость функций δ и δ'. Пусть $G = \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, покажем, что если $a\,\delta(x) + b\,\delta'(x) = 0$, то $a = b = 0$. Доказательство будем вести от противного. Пусть $a\,\delta(x) + b\,\delta'(x) = 0$. Это равенство должно выполняться для всех $x \in G$, в том числе и для $-x$, тогда имеем

$$\begin{cases} a\,\delta(x) + b\,\delta'(x) = 0, \\ \\ a\,\delta(-x) + b\,\delta'(-x) = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись тем, что δ-функция четна, а δ' нечетна, получим

$$\begin{cases} a\,\delta(x) + b\,\delta'(x) = 0, \\ \\ a\,\delta(x) - b\,\delta'(x) = 0. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, получим $2a\,\delta(x) = 0$, из чего заключаем, что $a = 0$. Вычтя из первого равенства второе, имеем $2b\,\delta'(x) = 0$, отсюда делаем вывод, что $b = 0$. Это были наводящие соображения.

Теперь рассмотрим общий случай. Покажем, что если

$$a_1\,\delta(x) + a_2\,\delta'(x) + \ldots + a_k\,\delta^{(k)}(x) = 0, \tag{11}$$

то $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Возьмем последовательность основных функций $\varphi_n \in \mathcal{D}(G)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Зная, что $\delta^{(k)} = (-1)^k \varphi_n^{(k)}(0)$, запишем равенство (11) для каждой функции φ_n и получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1\,\varphi_1(0) - a_2\,\varphi_1'(0) + \ldots + (-1)^k a_k\,\varphi_1^{(k)}(0) = 0, \\ \vdots \\ a_1\,\varphi_k(0) - a_2\,\varphi_k'(0) + \ldots + (-1)^k a_k\,\varphi_k^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$AX = B, \tag{12}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \ldots & (-1)^k \varphi_1^{(k)}(0) \\ \vdots & & \\ \varphi_k(0) & \ldots & (-1)^k \varphi_k^{(k)}(0) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как равенство (12) должно выполняться для любой матрицы A, то вектор X равен нулю, т. е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, а это доказывает линейную независимость функций $\delta,\ \delta',\ \delta'',\ \ldots,\ \delta^{(k)}$.

В примерах 25–27 вычислим производные $f^{(k)}, \quad k \geq 1$, для кусочно-гладких функций.

Пример 25. $f(x) = H(x)$.

Решение. Первую производную функции Хевисайда $H(x)$ мы вычислили в примере 19: $H'(x) = \delta(x)$. Производная порядка $k > 1$ будет равна $H^{(k)}(x) = \delta^{(k-1)}(x)$.

Пример 26. $f(x) = |x|$.

Решение. Функция $|x|$ является непрерывной кусочно-гладкой функцией, и ее классическая производная равна $(|x|)' = \operatorname{sign} x$. Скачок функции $|x|$ в точке излома $x = 0$ равен 0, поэтому по формуле (8) для обобщенной производной имеем

$$f'_{\text{об}} = \operatorname{sign} x + 0 \cdot \delta(x - 0) = \operatorname{sign} x.$$

Функцию $\operatorname{sign} x$ можем представить через функцию Хевисайда $\operatorname{sign} x = -1 + 2H(x)$. Вторую производную запишем так: $(|x|)'' = (\operatorname{sign} x)' = (-1 + 2H(x))'$. Так как классическая производная функции $\operatorname{sign} x$ равна 0, а скачок функции $2H(x)$ в точке излома $x = 0$ равен 2, то по формуле для обобщенной производной имеем

$$(-1 + 2H(x))' = 2\delta(x).$$

Производная порядка $k,\ k > 2$ будет равна

$$(|x|)^{(k)} = 2\delta^{(k-2)}(x).$$

Пример 27. $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$.

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рис. 8.

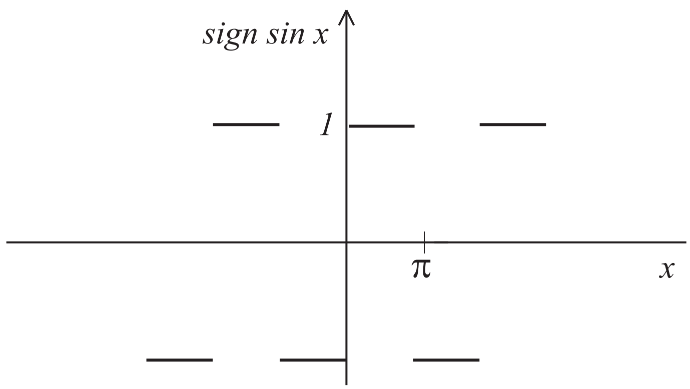

Рис. 8. График функций $f(x) = \text{sign}\,(\sin x)$.

В точках $x = k\pi,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ функция терпит разрыв первого рода, причем в точках $x = 2k\pi$ скачок $[f(x)] = 2$, а в точках $x = \pi + 2k\pi$ скачок $[f(x)] = -2$. Следовательно, обобщенная производная первого порядка равна

$$f'_{\text{об}} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2\delta(x-2j\pi) - 2\delta(x-\pi+2j\pi) = 2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \delta(x-j\pi).$$

Обобщенную производную порядка $k,\ k > 1$ вычислим по формуле

$$f^{(k)}_{\text{об}} = 2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \delta^{(k-1)}(x-j\pi).$$

Пример 28. Докажем равенство

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad \text{где } (\ln|x|, \varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)\,dx.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования обобщенной функции и по определению регулярной обобщенной функции имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\ln|x|, \varphi(x)\right) = -(\ln|x|, \varphi'(x)) = -v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)\,dx.$$

Здесь мы записали обобщенную функцию как интеграл в смысле главного значения, так как функция $\ln|x|$ не является локально интегрируемой функцией в окрестности нуля. Поскольку φ — основная функция и зануляется вне промежутка $[-R, R]$, то интеграл в смысле главного значения имеет вид

$$-v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \ln|x|d\varphi(x) + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \ln|x|d\varphi(x)\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)\Big|_{-R}^{-\varepsilon} - \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{sign\,x}}{|x|}\varphi(x)\,dx\right) -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{R} - \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{sign\,x}}{|x|}\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\big(\ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\big) + v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Пользуясь дифференцируемостью функции φ, запишем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\big(\ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon)-\ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\big)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln(\varepsilon)\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$$

Применяя правило Лопиталя, легко показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln(\varepsilon)=0$. В примере 22 мы показали, что $\dfrac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}=-2\varphi'(0)$. Следовательно,

$$\left(\frac{d}{dx}\ln|x|,\varphi(x)\right)=\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Пример 29. Докажем равенство

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}=-\mathcal{P}\frac{1}{x^2},$$

где

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)=v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

Доказательство. По определению функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ и правилу дифференцирования обобщенной функции имеем

$$-\left(\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi'(x)\right)=v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx.$$

Подынтегральная функция имеет особенность при $x=0$, $supp\,\varphi\subset[-R;R]$, поэтому интеграл в смысле главного значения запишем в виде

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)\,dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi'(x)\,dx}{x}\right].$$

После того как каждый из интегралов возьмем по частям, выражение примет вид

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(x)}{x} \Bigg|_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)\, dx}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x} \Bigg|_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)\, dx}{x^2} \right].$$

В каждом из интегралов к числителю добавим $\pm\varphi(0)$ и сгруппируем приведенное выше выражение в виде

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(-R)}{-R} + \frac{\varphi(R)}{R} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \right.$$

$$+ \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx +$$

$$\left. + \varphi(0) \left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{x^2} \right) \right]. \qquad (13)$$

Слагаемые

$$\frac{\varphi(-R)}{-R} = \frac{\varphi(R)}{R} = 0$$

по определению пробной функции.

Вычислив интегралы, стоящие в круглых скобках, равенство (13) запишем в виде

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right] +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx+\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right]+$$

$$-\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{x}\Bigg|_{-R}^{-\varepsilon}+\frac{1}{x}\Bigg|_{\varepsilon}^{R}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]+v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx+$$

$$-\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{-\varepsilon}-\frac{1}{-R}+\frac{1}{R}-\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

При $R\to+\infty$ дробь $\dfrac{1}{R}\to 0$, тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{\varphi(0)}{-\varepsilon}+\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]+\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right]+\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)=$$

$$=\varphi'(0)-\varphi'(0)+\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right).$$

Таким образом, мы показали, что

$$-\left(\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right),$$

и это доказывает требуемое равенство.

В примерах 30–32 проверьте, что решениями приведенных уравнений являются указанные функции.

Пример 30. $xF' = 1$; $F(x) = c_1 + c_2 H(x) + \ln|x|$.

Решение. Простой подстановкой производной указанной функции F в данное дифференциальное уравнение убедимся, что F является решением уравнения. Вычислим производную F'

$$F' = (c_1 + H(x) + \ln|x|)' = c_1' + (c_2 H(x))' + \ln'|x| =$$

$$= 0 + c_2\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

В примере 28 мы убедились, что $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$. Подставим функцию F' в уравнение

$$xF' = x\left(\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = x\delta(x) + x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0 + 1 = 1,$$

что и требовалось показать.

Нахождение решения данного дифференциального уравнения $xF' = 1$ и доказательство единственности этого решения выходит за рамки этого пособия. Аналогично в примерах 31 и 32.

Пример 31. $xF' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$; $F(x) = c_1 + c_2 H(x) - \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

Решение. Подстановкой указанной функции F в данное уравнение убедимся, что F является решением уравнения. Вычислим производную F':

$$F' = \left(c_1 + c_2 H(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = c_1' + (c_2 H(x))' - \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= c_2\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

Здесь мы использовали результат из примера 29. Подставим функцию F' в уравнение

$$xF' = x\left(c_2\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right) = c_2 x\delta(x) + x\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

По определению δ-функции имеем $x\delta(x) = 0$. Подействовав функцией $x\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$ на пробную функцию φ, получим

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x\varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2}\, dx =$$

$$= v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Здесь мы использовали равенство (4). Таким образом, функция F является решением данного уравнения.

Пример 32. $x^2F' = 1$; $F(x) = c_1 + c_2H(x) + c_3\delta - \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

Решение. Подстановкой функции F в уравнение убедимся, что F является решением уравнения. Вычислим производную F':

$$F' = \left(c_1 + c_2H(x) + c_3\delta - \mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= c_1' + (c_2H(x))' + (c_3\delta)' - \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = c_2\delta(x) + c_3\delta'(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

Подставим функцию F' в уравнение

$$x^2F' = x^2\left(c_2\delta(x) + c_3\delta'(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= c_2x^2\delta(x) \;+\; c_3x^2\delta'(x) \;+\; x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} =$$

$$= 0 + c_3x^2\delta'(x) + 1 = 1,$$

что доказывает требуемое равенство.

Пример 33. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k\delta^{(k)}(x-k)$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для всех $c_k \in \mathbb{R}$.

Решение. Сходимость ряда означает, что существует предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ последовательности обобщенных функций $F_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k\delta^{(k)}(x-k)$. Это означает, что для всякой функции $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ последовательность $F_N(\varphi)$ сходится при $N \to +\infty$. Подействовав на пробную функцию φ обобщенной функцией F_N, получим

$$F_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{N}(c_k\delta^{(k)}(x-k))(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} c_k(-1)^{(k)}(\varphi)^{(k)}(k).$$

Для пробной функции φ в силу ее финитности существует $N_0 = N_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $|x| > N_0$ и всех $k \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(k)}(x) = 0$. Отсюда следует, что для всех $N \geq N_0$ частичная сумма $F_N(\varphi) = F_{N_0}(\varphi)$, следовательно, последовательность сходится.

ЗАДАЧИ

Примечание. Во всех задачах φ является основной (пробной) функцией.

1. Выяснить, есть ли среди последовательностей

а) $\dfrac{1}{k}\,\varphi(x)$; б) $\dfrac{1}{k}\,\varphi(kx)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, сходящиеся в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

2. Пусть P — полином. Доказать $\varphi \cdot P \in \mathcal{D}$.

3. Доказать, что при любом $k = 1,\ 2,\ \ldots$ $\varphi^{(k)}$ — пробная функция.

4. Доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$$

— основная, где $\eta(x)$ — функция из примера 1 и $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ имеет единственный нуль порядка 1 в точке $x = 0$.

5. Доказать, что $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ — сингулярная обобщенная функция.

6. Вычислить в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ предел $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi\,\varepsilon})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\,\varepsilon}}$ при $\varepsilon \to 0,\ n \geq 1$.

7. Вычислить пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $t \to +\infty$

а) $\dfrac{e^{-ixt}}{x - i0}$; б) $\dfrac{e^{-ixt}}{x + i0}$.

В задачах 8–10 показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ выполняются равенства.

8. $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

9. $\delta''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\delta(x+2h) + 2\,\delta(x-2h) - \delta(x)}{4\,h^2}$.

10. $\alpha(x)\,\delta^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} C_m^k \alpha^{(m-k)}(0)\delta^{(k)}(x)$,

где $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

11. Вычислить

а) $(x \operatorname{sign} x)'$; б) $H^{(n)}(x_0 - x)$, $n \geq 1$ — целое; в) $(\operatorname{sign} x)^{(n)}$.

12. Доказать, что $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x \pm i0} = \mp\pi\delta'(x) - \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$.

13. Вычислить все производные

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |\, x \,| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

14. Вычислить производную $f(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$.

15. Существуют ли в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ пределы а) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Если они существуют, то чему равны?

16. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(x-3)\, dx$.

17. Упростить выражения

а) $(x^2+3)\delta(x+5)$; б) $\delta(2x-8)$; в) $\delta(x^2+x-2)$.

18. Докажите равенство $\delta(x^2-a^2) = \dfrac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|}$.

19. Докажите равенство $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k)$.

Ответы

1. а) сходится к нулю; б) не сходится, если $\varphi(x) \neq 0$.

4. $\delta(x)$. **6.** $\delta(x)$. **7.** а) 0; б) $-i\,2\,\pi\,\delta(x)$.

11. а) $\operatorname{sign} x$; б) $-\delta^{(n-1)}(x-x_0)$; в) $2\delta^{(n-1)}(x)$.

13. а) $f' = 2H(1-|x|)\,x + \delta(x-1) - \delta(x+1)$,

$f'' = 2H(1-|x|) - 2\delta(x-1) - 2\delta(x+1) - \delta'(x-1) + \delta'(x+1)$,

$f^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{2}{(3-k)!}\left[(-1)^{k-1}\,\delta^{(n-k)}(x+1) - \delta^{(n-k)}(x-1)\right]$,

$n = 3,\ 4,\ \ldots$;

б) $f' = H(x) - H(x-1) + 2H(x-1)\,x$,

$f'' = \delta(x) + \delta(x-1) + 2H(x-1)$,

$f^{(n)} = 2\delta^{(n-3)}(x-1) + \delta^{(n-2)}(x-1) + \delta^{(n-2)}(x)$, $n = 3, 4, \ldots$.

14. $f'(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2} e^{\frac{1}{x}} x^{-2} - \delta(x)$. **15.** а) 0; б) 0.

16. $3^2 = 9$.

17. а) $28\,\delta(x+5)$; б) $\dfrac{1}{2}\delta(x-4)$; в) $\dfrac{1}{3}\delta(x-1) + \dfrac{1}{3}\delta(x+2)$.

3.2.1. Решение дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций.

Определение. *Линейным дифференциальным оператором порядка k* с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется выражение

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{14}$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам порядка $|\alpha| \leq k$, $a_\alpha : G \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем хотя бы для одного мультииндекса α порядка k функция a_α не равняется нулю тождественно, и D^α — производная порядка α.

Линейный дифференциальный оператор (14) действует на обобщенную функцию $F \in \mathcal{D}'(G)$ по правилу $LF = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha F$. Если обобщенные функции F_1 и F_2 удовлетворяют равенству $LF_1 = F_2$, то говорят, что F_1 является решением дифференциального уравнения $LF = F_2$ в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(G)$.

Определение. Обобщенная функция E называется *фундаментальным решением* дифференциального оператора L, если $LE = \delta$.

Напомним следующую *формулу Грина*, известную из курса математического анализа:

Для любой области D, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D, в предположении непрерывности функций P, Q и их производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замыкании области D, справедлива формула

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy,$$

контур обходится в положительном направлении против часовой стрелки.

Пример 34. Докажем, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \delta(x, y),$$

где $F(x, y) = H(x)H(y)$ является произведением функций Хевисайда. Другими словами, докажем, что функция F является фундаментальным решением дифференциального оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Доказательство. Функция $F(x, y) = H(x)H(y)$ является локально интегрируемой, поэтому она порождает регулярную обобщенную функцию. Пользуясь правилом дифференцирования обобщенных функций, запишем

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \varphi\right) = \left(F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)H(y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, dx\, dy.$$

Область D, в которой $F(x, y) = 1$, изображена на рис. 9. Применяя формулу Грина, от интеграла по области перейдем к интегралу по границе области

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = \lim_{R \to +\infty} \iint\limits_{D_R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, dx\, dy =$$

$$= \left| P = 0,\ Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \right| = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\partial D_R} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy.$$

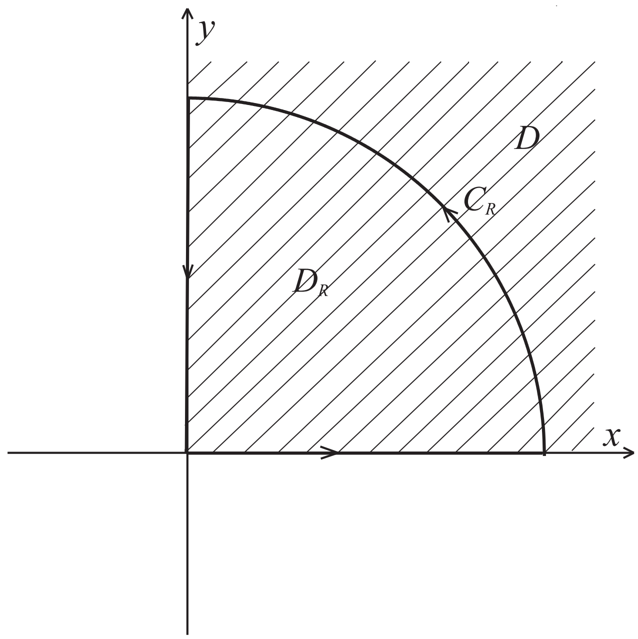

Рис. 9. Область D_R

Границами области D_R являются: ось Ox, интегрирование вдоль которой будет идти в сторону возрастания x; дуга окружности C_R радиуса R, $\quad R \to +\infty$, интегрирование вдоль которой будет идти против часовой стрелки; ось Oy, интегрирование вдоль которой будет идти в сторону убывания y.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial \varphi(x,0)}{\partial y}\, dy$ вдоль оси Ox равен нулю, так как параметр $y = 0$.

Интеграл $\int\limits_{C_R} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy$ по дуге окружности C_R равен нулю, так как пробная функция $\varphi(x,y) = 0$ для всех $(x,y) : x^2+y^2 > R^2$ при достаточно большом R.

Интеграл вдоль оси Oy будет равен

$$\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{\partial\varphi(0,y)}{\partial y}\,dy = \varphi\Big|_{y=+\infty}^{y=0} = \varphi(0,0) - \varphi(0,+\infty) = \varphi(0,0).$$

Мы подставили значение $x = 0$, так как интегрирование велось вдоль оси Oy, на которой $x = 0$.

Итак, мы получили, что

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \varphi\right) = \varphi(0,0) = \delta(x,y).$$

Значит, обобщенная функция $F(x,y) = H(x)\,H(y)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Пример 35. Докажем, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ выполняется равенство

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \delta(x,y),$$

где a — некоторая положительная постоянная, а

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{a}{2}, & \text{если} \quad a^2x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{и} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, докажем, что функция F является фундаментальным решением волнового оператора

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

.

Доказательство. Пользуясь правилом дифференцирования обобщенных функций, запишем

$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\varphi\right)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\varphi\right)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(F,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)-\left(F,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)=\left(F,\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right).$$

Этим мы перенесли операцию дифференцирования с обобщенной функции F на основную функцию φ.

Так как функция

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}, & \text{если}\quad a^2x^2-y^2\geq 0\quad \text{и}\quad x\geq 0,\\[2ex] 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$$

является локально интегрируемой, то она порождает регулярную обобщенную функцию по правилу

$$\left(F,\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D F(x,y)\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]dx\,dy.$$

Область D, в которой $F(x,y)=\dfrac{a}{2}$, изображена на рис. 10. Границы области D установим, разрешив равенство $a^2x^2=y^2$: $a|x|=|y|$, $ax=\pm y$ по условию $a>0$ $x\geq 0$. Область D, заданная неравенством $a^2x^2\geq y^2$, лежит между лучами $y=-ax$ и $y=ax$.

Применяя формулу Грина, от интеграла по области перейдем к интегралу по границе области

$$\iint\limits_D\left[\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{a}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]dx\,dy=$$

$$= \left| P = \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ Q = \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \right| = \int\limits_{\partial D} \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy.$$

Границами области D являются: луч ∂D_1 : $y = -ax$, интегрирование вдоль которой будет идти в сторону возрастания x; дуга окружности ∂D_2 : C_R радиуса R, $R \to +\infty$, интегрирование вдоль которой будет идти против часовой стрелки; луч ∂D_3 : $y = ax$, интегрирование вдоль которой будет идти в сторону убывания x.

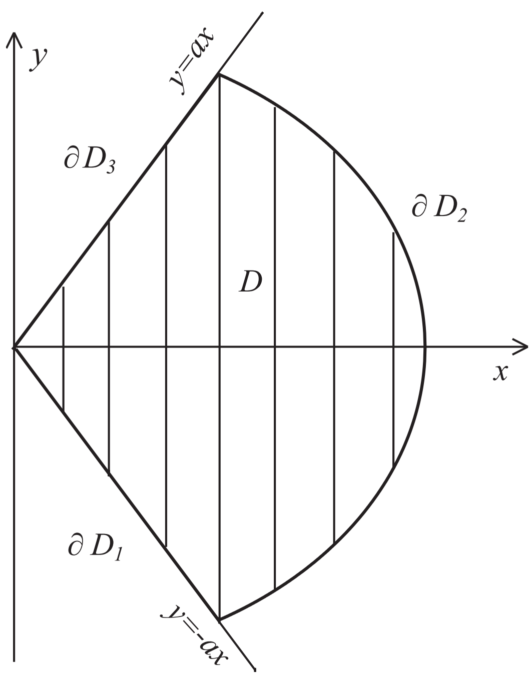

Рис. 10. Область D

Вычислим интеграл по границе ∂D_1. С помощью параметризации $x = x(t) = t$, $y = y(t) = -at$, $0 \leq t < +\infty$ мы перешли от функции $\varphi(x, y)$ к функции $t \mapsto \varphi(t, -at) = g(t)$.

Дифференцирование функции $g(t)$ произведем по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -at) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, -at) \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -at) \cdot 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, -at) \cdot (-a) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -at) - a\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, -at).$$

Интегрируя по границе ∂D_1, получаем

$$\int\limits_{\partial D_1} \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy = \int\limits_0^{+\infty} \Big(\frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, -at) - a\frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -at)\Big)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dg}{dt}\,dt = \frac{1}{2}g\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(g(+\infty) - g(0)) = \frac{1}{2}g(0).$$

Значение функции g в ∞ равно нулю ($g(+\infty) = 0$), так как пробная функция $\varphi(t, -at) = 0$ при $t \to +\infty$.

Интеграл по дуге окружности

$$\int\limits_{C_R} \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy = 0,$$

так как пробная функция $\varphi(x, y) = 0$ для всех x, y таких, что $x^2 + y^2 > R^2$.

Вычислим интеграл по границе ∂D_2. Произведя параметризацию $x = x(t) = t$, $y = y(t) = at$, $0 \le t < +\infty$, от функции $\varphi(x, y)$ перейдем к функции $t \mapsto \varphi(t, at) = g(t)$. Продиффеpенцировав функцию $g(t)$ по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, at) + a\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, at).$$

Так как ориентация получилась противоположной направлению обхода, то изменим знак перед интегралом на противоположный

$$\int\limits_{\partial D_1} \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy = -\int\limits_0^{+\infty}\Big(\frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,at) + a\frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,at)\Big)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dg}{dt}\,dt = -\frac{1}{2}g\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(g(+\infty)-g(0)) = \frac{1}{2}g(0).$$

Используя свойство аддитивности интеграла

$$\int\limits_{\partial D} f\,dt = \int\limits_{\partial D_1} f\,dt + \int\limits_{\partial D_2} f\,dt + \int\limits_{\partial D_3} f\,dt,$$

имеем

$$\int\limits_{\partial D} \frac{a}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{1}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy = \varphi(0,0) = \delta(x,y).$$

Итак, мы получили, что

$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \varphi\right) = \varphi(0,0) = \delta(x,y).$$

Значит, обобщенная функция $F(x,y)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

3.2.2. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора

Теорема. Пусть

$$L = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x) \frac{d^j}{dx^j}$$

— обыкновенный линейный дифференциальный оператор в $\mathbb{R}$, причем $a_0 = 1$, а $a_k(x)$ бесконечно дифференцируемы. Пусть функция $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^k(\mathbb{R})$ является «классическим» решением однородного уравнения $Lf = 0$, которое удовлетворяет условиям f_0: $f_0(0) = f_0'(0) = \dots = f_0^{(k-2)}(0) = 0$ и $f_0^{(k-1)}(0) = 1$. Тогда регулярная обобщенная функция $E = H(x)f_0(x)$ является фундаментальным решением оператора L, т. е. удовлетворяет уравнению $LE = \delta$.

Пример 36. Найдем фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора

$$L = \frac{d}{dx} - \lambda.$$

Решение. Сначала найдем решение классического дифференциального уравнения $Lf = 0$. Уравнение

$$\frac{df_0}{dx} - \lambda f_0 = 0$$

является уравнением первого порядка, начальные условия, задаваемые условием теоремы, имеют вид

$$f_0(0) = 1.$$

Решим его методом разделения переменных. Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{df_0}{f_0} = \lambda dx$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{df_0}{f_0} = \int \lambda dx, \quad \text{или} \quad \ln|f_0| = \lambda x + C.$$

Это общее решение данного уравнения. Приведем его к виду $f_0(x) = Ce^{\lambda x}$.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную C; получаем $1 = Ce^{\lambda \cdot 0}$, откуда получаем искомое решение $f_0(x) = e^{\lambda x}$.

По теореме регулярная обобщенная функция

$$E = H(x)e^{\lambda x}$$

является фундаментальным решением оператора $L = \dfrac{d}{dx} - \lambda$.

Пример 37. Найдем фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2.$$

Решение. Найдем решение классического дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями

$$f_0(0) = 0 \quad \text{и} \quad f_0'(0) = 1. \tag{15}$$

Пусть $\lambda \neq 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + \lambda^2 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $k = \pm|\lambda|i$, а потому им соответствуют частные решения $\cos \lambda x$, $\sin \lambda x$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$f_0(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

а его производная

$$f_0'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x.$$

Используя начальные условия, найдем произвольные постоянные $A = 0$ и $B = \dfrac{1}{\lambda}$, откуда получаем искомое решение $f_0(x) = \dfrac{\sin \lambda x}{\lambda}$.

Если $\lambda = 0$, то дифференциальное уравнение второго порядка примет вид $\dfrac{d^2 f_0}{d^2 x} = 0$. Его решением, удовлетворяющим начальными условиям (15), является функция $f_0(x) = x$. Так как $\sin\lambda x \sim \lambda x$ при $\lambda x \to 0$, то решение $f_0(x) = x$ является пределом решения $f_0(x) = \dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}$ при $\lambda \to 0$. Таким образом, регулярная обобщенная функция

$$E = H(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}$$

является фундаментальным решением линейного дифференциального оператора $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + \lambda^2$.

3.3. Свертка обобщенных функций

Определение. Пусть F и G — обобщенные функции в $\mathbb{R}^n$, причем для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ функция $y \mapsto (G(z), \varphi(y+z))$ также является пробной. В этом случае *сверткой* функций F и G называют новую обобщенную функцию $F * G$, которая действует на любую основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ по правилу $(F*G, \varphi) = (F(y), (G(z), \varphi(y+z)))$. Отметим, что если функция $y \mapsto (G(z), \varphi(y+z))$ не является пробной, то свертка $F * G$ не может быть определена для любой обобщенной функции F. Вместе с тем для некоторых «удачно подобранных» F может оказаться, что свертка определена корректно даже в этом случае.

Свойства свертки обобщенных функций.

1. Для любой обобщенной функции F определена ее свертка с δ-функцией. При этом $F * \delta = F$.

Замечание. Смысл этой формулы состоит в том, что всякую обобщенную функцию можно разложить по δ-функциям, а это формально записывают так: $f(x) = \displaystyle\int f(\xi)\delta(x-\xi)\,d\xi$.

Именно эту формулу имеют в виду, когда говорят, что всякое материальное тело состоит из точечных масс, всякий источник состоит из точечных источников и т. д.

2. Свертка линейна по первому аргументу, т. е. для любых чисел a_1 и a_2 и обобщенных функций F_1, F_2 и G, таких, что определены свертки $F_1 * G$ и $F_2 * G$, определена также свертка $(a_1F_1 + a_2F_2) * G$, причем имеет место равенство

$$(a_1F_1 + a_2F_2) * G = a_1(F_1 * G) + a_2(F_2 * G).$$

3. Свертка коммутативна, т. е. для любых обобщенных функций F и G таких, что определены свертки $F * G$ и $G * F$, имеет место равенство $F * G = G * F$.

4. Для того чтобы продифференцировать свертку, достаточно продифференцировать любой из сомножителей. Другими словами, если для обобщенных функций F и G определена свертка $F * G$, то для любого мультииндекса α определены также свертки $(D^\alpha F) * G$ и $F * (D^\alpha G)$ и имеет место равенство

$$D^\alpha(F * G) = (D^\alpha F) * G = F * (D^\alpha G).$$

Замечание. Свертка обобщенных функций, вообще говоря, не ассоциативна, т. е. равенство

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$$

выполняется не всегда. В качестве примера можно взять $F_1 = 1$ (функция, тождественно равная единице), $F_2 = \delta'$ (производная δ-функции) и $F_3 = H$ (функция Хевисайда).

Тогда, с одной стороны,

$$(F_1 * F_2, \varphi) = (1, (\delta'(z), \varphi(y + z))) =$$
$$= -(1, \varphi'(y)) = (1', \varphi) = (0, \varphi),$$

а значит, свертка $(F_1 * F_2)$ определена и равна нулю. Следовательно,

$$(F_1 * F_2) * F_3 = 0 * H = 0.$$

С другой стороны,

$$(F_2*F_3, \varphi) = (\delta'*H, \varphi) = (H*\delta', \varphi) = (H(y), (\delta'(z), \varphi(y+z))) =$$

$$= -(H(y), \varphi'(y)) = (H', \varphi) = (\delta, \varphi),$$

значит, свертка $F_2 * F_3$ также определена и равна δ-функции. При этом $F_1 * (F_2 * F_3) = 1 * \delta = 1$. Наконец, поскольку $0 \neq 1$, то $(F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3)$.

Вычислим следующие свертки в $\mathcal{D}'(R)$.

Пример 38. $\delta(x - a) * F(x)$, где $F \in \mathcal{D}'(R)$.

Решение. Сначала приведем неформальное решение. По определению обобщенной функции и свертки имеем

$$(\delta(x-a) * F(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a-y)F(y)\,dy \right] \varphi(x)\,dx.$$

Поменяем порядок интегрирования (так как φ — основная функция, то интегрирование ведется по ограниченному промежутку и изменение порядка интегрирования законно)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a-y)F(y)\,dy \right] \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a-y)\varphi(x)\,dx \right] dy. \tag{16}$$

Выполнив во внутреннем интеграле замену переменной $z = x - y - a$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a-y)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)\varphi(z+y+a)\,dz = \varphi(y+a).$$

Подставив результат вычисления в (16) и выполнив замену переменной $t = y + a$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a-y)\varphi(x)\,dx \right] dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)\varphi(y+a)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(t-a)\varphi(t)\,dt = (F(t-a), \varphi(t)).$$

Вернувшись к переменной x и соединив начало и конец цепочки рассуждений, получим

$$(\delta(x-a) * F(x), \varphi(x)) = (F(x-a), \varphi(x)).$$

Следовательно,

$$\delta(x-a) * F(x) = F(x-a).$$

Теперь приведем формальное решение

$$(\delta(x-a) * F(x), \varphi(x)) = (\delta(x-a), (F(z), \varphi(x+z))) =$$

$$= (F(z), \varphi(a+z)) = (F(z-a), \varphi(z)).$$

Пример 39.

$$\delta''(x) * |x|.$$

Решение. По свойствам свертки обобщенных функций $(D^\alpha F) * G = D^\alpha (F * G)$ и $\delta * F = F$ имеем

$$\delta''(x) * |x| = (\delta(x) * |x|)'' = (|x|)''.$$

Вторую производную функции $|x|$ мы уже вычислили в примере 26: $(|x|)'' = 2\delta(x)$. Следовательно,

$$\delta''(x) * |x| = 2\delta(x).$$

Пример 40. Пусть f и g локально интегрируемы в $\mathbb{R}$, причем $f(x) = g(x) = 0$ для всех $x < 0$. Докажем, что свертка $f * g$ определена и задается формулой

$$(f * g)(x) = H(x) \int_0^x f(y)g(x-y)\,dy.$$

Решение. Так как f и g локально интегрируемы в $\mathbb{R}$ и $f(x) = g(x) = 0$ для всех $x < 0$, то произведение

$$f(y)g(x-y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < y \\ f(y)g(x-y), & \text{если} \quad x > y > 0 \end{cases}$$

также является локально интегрируемой функцией и свертка $f * g$ определена. По определению свертки имеем

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx. \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в скобках. Так как $f(y) = 0$ для всех $y < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy = \int_0^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy.$$

По условию $g(x) = 0$ для всех $x < 0$, значит,

$$g(x-y) = \begin{cases} g(x-y), & \text{если} \quad x > y, \\ 0, & \text{если} \quad x < y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy = \begin{cases} \int_0^x f(y)g(x-y)\,dy, & \text{если} \quad x > y > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < y. \end{cases}$$

Иначе это можно записать так:

$$\int_0^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy = H(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy,$$

и (17) примет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(H(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, $(f * g)(x) = H(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy.$

Пример 41. Вычислим свертку $H * H$.

Решение. Мы уже вычисляли эту свертку, когда изучали тему «Преобразование Фурье», сейчас, просто воспользовавшись результатом примера 40, заключаем

$$(H * H)(x) = H(x)\int_0^x H(y)H(x-y)\,dy =$$

$$= H(x)\int_0^x 1 \cdot dy = xH(x).$$

3.4. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Пусть f — быстро убывающая функция в $\mathbb{R}^n$, а φ — пробная (а значит, тоже быстро убывающая) функция. Прямое и обратное преобразование Фурье быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$ задается формулами

$$\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)}\, dx,$$

где (x, y) обозначает скалярное произведение векторов x и y в $\mathbb{R}^n$.

Следующие свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций помогут определить преобразование Фурье обобщенных функций.

1. Равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f](y)\overline{\mathcal{F}_{\pm}[\varphi](y)}\, dy,$$

где черта означает комплексное сопряжение.

2. $\overline{\mathcal{F}_{\pm}[\varphi]} = \mathcal{F}_{\mp}[\overline{\varphi}]$.

3. Преобразование Фурье отображает пространство быстро убывающих функций на себя, в частности, для любой пробной функции φ найдется быстро убывающая функция ψ такая, что $\overline{\varphi} = \mathcal{F}_{\pm}[\psi]$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\psi = \mathcal{F}_{\mp}[\overline{\varphi}]$.) Но тогда $\overline{\psi} = \overline{\mathcal{F}_{\mp}[\overline{\varphi}]} = \mathcal{F}_{\pm}[\overline{\overline{\varphi}}] = \mathcal{F}_{\pm}[\varphi]$.

Определение. *Преобразованием Фурье* (прямым или обратным) обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется новая обобщенная функция $\mathcal{F}_{\pm}[F]$, которая действует на произвольную пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу $(\mathcal{F}_{\pm}[F], \varphi) = (F, \mathcal{F}_{\pm}[\varphi])$.

Таким образом, преобразование Фурье с обобщенной функции переносится на пробную функцию, а преобразование Фурье пробной функции уже будет быстро убывающей функцией (не финитной). Если потребовать, чтобы преобразование Фурье пробной функции было пробной функцией, то такому требованию подчиняется только одна функция — тождественный нуль. Поэтому работая с преобразованием Фурье в пространстве обобщенных функций, в качестве основных функций принимают быстро убывающие функции, знакомые нам по теме «Преобразование Фурье», т. е. бесконечно дифференцируемые функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, которые убывают на бесконечности быстрее любого многочлена. В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций вводят следующее понятие сходимости: последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *сходится* в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если для любых мультииндексов α и β последовательность функций $x^\alpha D^\beta \varphi_1, x^\alpha D^\beta \varphi_2, \ldots, x^\alpha D^\beta \varphi_k$ сходится к функции $x^\alpha D^\beta \varphi$ при $k \to +\infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Обобщенной функцией медленного роста* называют линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ основных функций, принимающий значения во множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пространство обобщенных функций медленного роста обозначают через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку из темы «Преобразование Фурье» известно, что «классическое» преобразование Фурье переводит любую быстро убывающую функцию в быстро убывающую, то правило $(\mathcal{F}_\pm[F], \varphi) = (F, \mathcal{F}_\pm[\varphi])$ действительно определяет новую обобщенную функцию $\mathcal{F}_\pm[F] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ для любой обобщенной функции медленного роста $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Другими словами, теперь мы знаем наверняка, что преобразование Фурье можно применять к любой обобщенной функции медленного роста.

Свойства преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста

1. *Преобразование Фурье линейно*, т. е. для любых a, $b \in \mathbb{C}$ и любых F, $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}_{\pm}[aF(x) + bG(x)](y) = a\mathcal{F}_{\pm}[F(x)](y) + b\mathcal{F}_{\pm}[G(x)](y).$$

2. Для любого мультииндекса α и любой функции $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha}F(x)](y) = (\pm i)^{|\alpha|}D^{\alpha}\mathcal{F}_{\pm}[F(x)](y).$$

3. Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства

$$\mathcal{F}_{\pm}[D^{\alpha}F(x)](y) = (\pm iy)^{|\alpha|}\mathcal{F}_{\pm}[F(x)](y).$$

4. Как прямое, так и обратное преобразование Фурье являются непрерывными отображениями пространства обобщенных функций медленного роста в себя.
5. Для любой функции $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}_{+}[\mathcal{F}_{-}[F]] = F \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{-}[\mathcal{F}_{+}[F]] = F,$$

называемые формулами обращения. Другими словами, последовательное применение прямого и обратного преобразований Фурье не изменяет функции.

Если обобщенные функции медленного роста F и G таковы, что имеют смысл участвующие в соответствующих формулах операции свертки и умножения для F, G, $\mathcal{F}_{\pm}[F]$ и $\mathcal{F}_{\pm}[G]$, то справедливы еще и следующие соотношения.
6. $\mathcal{F}_{\pm}[F * G] = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}_{\pm}[F] \cdot \mathcal{F}_{\pm}[G]$.
7. $\mathcal{F}_{\pm}[F \cdot G] = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}_{\pm}[F] \cdot \mathcal{F}_{\pm}[G]$.

Найдем преобразование Фурье некоторых обобщенных функций медленного роста.

Пример 42. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье δ-функции.

Решение. Имеем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[\delta], \varphi) = (\delta, \mathcal{F}_{\pm}[\varphi]) = \mathcal{F}_{\pm}[\varphi](0) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\mp i(x,y)}\, dx \Big|_{y=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{(2\pi)^{n/2}}\, dx = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right),$$

поэтому в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}_{\pm}[\delta] = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.

Пример 43. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье обобщенной функции $F = 1$.

Решение. Представим функцию $F = 1$ в виде

$$1 = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Используя формулу обращения и тот факт, что

$$\mathcal{F}_{\pm}[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}},$$

имеем

$$\mathcal{F}_{\pm}\Big[(2\pi)^{n/2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Big] = \mathcal{F}_{\pm}\Big[(2\pi)^{n/2} \cdot \mathcal{F}_{\mp}[\delta]\Big] =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}_{\pm}\Big[\mathcal{F}_{\mp}[\delta]\Big] = (2\pi)^{n/2}\delta,$$

поэтому в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}_{\pm}[1] = (2\pi)^{n/2}\delta$.

Замечание. Как прямое, так и обратное классические преобразования Фурье $F = 1$ и δ-функции не существуют, мы нашли их в смысле обобщенных функций медленного роста.

Пример 44. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье сдвинутой δ-функции $\delta(x-x_0)$.

Решение. По определению преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста имеем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[\delta(x-x_0)](y),\varphi(y)) = (\delta(x-x_0),\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)) =$$

$$= \mathcal{F}_{\pm}[\varphi](x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i(y,x)}\varphi(y)\,dy\Big|_{x=x_0} = \left(\frac{e^{\mp i(x_0,x)}}{(2\pi)^{n/2}},\varphi(y)\right),$$

значит,

$$\mathcal{F}_{\pm}[\delta(x-x_0)](y) = (2\pi)^{-n/2}e^{\mp i(x_0,x)}.$$

Пример 45. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье обобщенной функции $e^{i(x_0,x)}$.

Решение. По определению преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста имеем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[e^{i(x_0,x)}](y),\varphi(y)) = \big(e^{i(x_0,x)}\cdot 1,\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big).$$

По правилу умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию имеем

$$\big(e^{i(x_0,x)}\cdot 1,\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big) = \big(1,e^{i(x_0,x)}\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} 1\cdot\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{i(x_0,x)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i(y,x)}\varphi(y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} 1\cdot\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i(y-x_0,x)}\varphi(y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} 1\cdot\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y+x_0)]\,dx.$$

Перебросив преобразование Фурье с основной функции на обобщенную, получим

$$(\mathcal{F}_{\pm}[1], \varphi(y+x_0)) = \big((2\pi)^{n/2}\delta(y), \varphi(y+x_0)\big) =$$

$$= \big((2\pi)^{n/2}\delta(y-x_0), \varphi(y)\big)\,.$$

Таким образом, имеем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[e^{i(x_0,x)}](y) = 2\pi)^{n/2}\delta(y-x_0).$$

Пример 46. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье обобщенной функции $\delta^{(k)}(x)$.

Решение. По определению преобразования Фурье имеем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[\delta^{(k)}(x)](y), \varphi(y)) = \big(\delta^{(k)}(x), \mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big).$$

По правилу дифференцирования обобщенной функции имеем

$$\big(\delta^{(k)}(x), \mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)) = (-1)^k(\delta(x), D^{(k)}\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big).$$

Используя свойство преобразования Фурье быстро убывающих функций

$$(\pm i)^{|\alpha|}D^{\alpha}\mathcal{F}_{\pm}[f(x)](y) = (\mp i)^{|\alpha|}\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha}f(x)](y),$$

запишем

$$(-1)^k\big(\delta(x), D^{(k)}\mathcal{F}_{\pm}[\varphi(y)](x)\big) =$$

$$= (-1)^k\big(\delta(x), (\mp i)^k\mathcal{F}_{\pm}[y^k\varphi(y)](x)\big) =$$

$$= (\pm i)^k\big(\delta(x), \mathcal{F}_{\pm}[y^k\varphi(y)](x)\big).$$

По определению δ-функции получаем

$$(\pm i)^k\big(\delta(x), \mathcal{F}_{\pm}[y^k\varphi(y)](x)\big) = (\pm i)^k\mathcal{F}_{\pm}[y^k\varphi(y)](0) =$$

$$= \frac{(\pm i)^k}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i(y,x)} y^k \varphi(y)\, dy \Bigg|_{x=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\pm iy)^k}{(2\pi)^{n/2}} \varphi(y)\, dy =$$

$$= \left(\frac{(\pm iy)^k}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi(y) \right).$$

Откуда заключаем, что в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}_{\pm}[\delta^{(k)}(x)](y) = \frac{(\pm iy)^k}{(2\pi)^{n/2}}.$$

При вычислении преобразования Фурье обобщенных функций иногда удобно выбрать последовательность обычных функций, стремящихся в пространстве $\mathcal{S}'$ к заданной (обобщенной) функции, найти преобразование Фурье членов этой последовательности, а затем вычислить искомое преобразование Фурье заданной функции с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье. Так, например, для того чтобы вычислить преобразование Фурье функции Хевисайда $H(x)$, найдем сначала преобразование Фурье функции $H(x)e^{-ax}$.

Пример 47. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье $H(x)e^{-ax}$, где $a > 0$.

Решение. По определению преобразования Фурье имеем

$$\mathcal{F}_{\pm}[H(x)e^{-ax}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-ax} e^{\mp i(x,y)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a \pm iy)x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)} e^{-(a \pm iy)x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty}.$$

Функция

$$e^{-(a \pm iy)x} = e^{-ax}\, e^{-iyx} = e^{-ax}\,(\cos yx \pm i \sin yx)$$

при $x = 0$ принимает значение $e^{-(a\pm iy)x} = 1$, а при $x \to +\infty$ $e^{-(a\pm iy)x} \to 0$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)} e^{-(a\pm iy)x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)}.$$

Откуда заключаем

$$\mathcal{F}_{\pm}[H(x)e^{-ax}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)}.$$

Пример 48. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье $H(x)$.

Решение. Покажем, что в $\mathcal{S}'$

$$H(x) = \lim_{a\to+0} H(x)e^{-ax}. \tag{18}$$

Действительно, для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}$ и любого числа $A > 0$ имеем:

$$\big|(H(x), \varphi(x)) - (H(x)e^{-ax}, \varphi(x))\big| = \left| \int\limits_0^{+\infty} (1 - e^{-ax})\varphi(x)\, dx \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_0^{A} (1 - e^{-ax})\varphi(x)\, dx \right| + \left| \int\limits_A^{+\infty} (1 - e^{-ax})\varphi(x)\, dx \right|. \tag{19}$$

Зафиксируем функцию $\varphi \in \mathcal{S}$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции φ существует $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_A^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} (1 - e^{-ax})\varphi(x)\, dx \right| \le \int\limits_A^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Выберем $a_0 > 0$ так, чтобы при $0 < a < a_0$ было справедливо неравенство

$$(1 - e^{-aA}) \int\limits_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\left| \int\limits_0^A (1 - e^{-ax})\varphi(x)\, dx \right| \leq (1 - e^{-aA}) \int\limits_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (21)$$

Тогда при $0 < a < a_0$ из (19), (20) и (21) получим

$$\big|(H(x), \varphi(x)) - (H(x)e^{-ax}, \varphi(x))\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Формула (18) доказана.

В силу непрерывности преобразования Фурье имеем

$$\mathcal{F}_{\pm}[H(x)](y) = \lim_{a \to +0} \mathcal{F}_{\pm}[H(x)e^{-ax}](y) =$$

$$= \mathcal{F}_{\pm}\big[\lim_{a \to +0} \big(H(x)e^{-ax}\big)\big](y) = \lim_{a \to +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)}.$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела,

$$\lim_{a \to +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)}{(a \pm iy)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \to +0} \frac{(\mp i)}{(y \mp ia)} = \frac{\mp i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(y \mp i0)}.$$

Используя формулу Сохоцкого, имеем

$$\frac{\mp i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(y \mp i0)} = \frac{\mp i}{\sqrt{2\pi}} \Big(\pm i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{y} \Big) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \delta \mp \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}\frac{1}{y}.$$

Мы получили, что

$$\mathcal{F}_{\pm}[H(x)](y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \delta \mp \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}\frac{1}{y}.$$

Пример 49. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье функции $\operatorname{sign} x$.

Решение. Представим функцию $\operatorname{sign} x$ в виде

$$\operatorname{sign} x = 2H(x) - 1.$$

В силу линейности преобразование Фурье имеем

$$\mathcal{F}_{\pm}[\operatorname{sign} x](y) = 2\mathcal{F}_{\pm}[H(x)](y) - \mathcal{F}_{\pm}[1](y) =$$

$$= 2\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(y) \mp \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}\right] - \sqrt{2\pi}\delta(y) = \mp i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}.$$

Пример 50. Найдем прямое и обратное преобразование Фурье функции $|x|$.

Решение. Представим функцию $|x|$ как произведение

$$|x| = x \cdot \operatorname{sign} x.$$

Используя результат примера 49 и свойство 2 преобразования Фурье, получаем

$$\mathcal{F}_{\pm}[|x|](y) = \mathcal{F}_{\pm}[x \cdot \operatorname{sign} x](y) = (\pm i)\frac{d}{dy}\mathcal{F}_{\pm}[\operatorname{sign} x](y) =$$

$$= (\pm i)\frac{d}{dy}\Big(\mp i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dy}\Big(\mathcal{P}\frac{1}{y}\Big) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y^2}.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 29.

20. Докажите, что

а) $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx + \ldots = -\pi \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - 2\pi k)$;

б) $\cos x + 4\cos 2x + \ldots + n^2 \cos nx + \ldots = -\pi \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x - 2\pi k)$.

21. Докажите, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ функция $F(x, y) = \dfrac{1}{2\,\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ является фундаментальным решением оператора $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

22. Докажите, что функция $F(t, x) = \dfrac{H(t)}{2\sqrt{\pi\, t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ является фундаментальным решением одномерного оператора теплопроводности $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

23. Найти фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора $L = \dfrac{d}{dx} - cos\, x$.

24. Показать, что $\delta^{(n)}(x - a) * F(x) = F^{(n)}(x - a)$.

25. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ свертку $H(x) * (x^2\, H(x))$.

26. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\text{а)}\quad F_{-}\left[\frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2}\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x_0 y;$$

$$\text{б)}\quad F_{-}\left[\frac{\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)}{2i}\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin x_0 y.$$

27. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ прямое и обратное преобразования Фурье функций: а) $H(a - |x|)$; б) $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$; в) $\dfrac{1}{x \pm i0}$.

Ответы

23. $H(x)\,sin\,x.$ **25.** $H(x)\dfrac{x^3}{3}.$

27. а) $F_{\pm}\left[H(a-|x|)\right](y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin ay}{y};$

б) $F_{\pm}\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\right](y)=i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign}\,\mathrm{y};$ в) $\mp i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign}\,\mathrm{y}.$

Предметный указатель

Список литературы

1. *Александров В. А.* Обобщенные функции: Учеб. пособие. Новосибирск : НГУ, 2005.

2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979.

3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М. : Физматлит, 1959. Вып. 1.

4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М. : Высшая школа, 1989.

5. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М. : Наука, 1974.

6. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М. : Наука, Физматлит, 1995.

7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М. : Наука, Физматлит, 1969.

Оглавление

Учебное издание

Бельхеева Румия Катдусовна

**ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалева*

Подписано в печать 6.08.2014 г.
Формат 60 x 84/16. Уч.-изд. л. 5,3. Усл. печ. л. 4,9.
Тираж 150 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.