

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Эдуард Витальевич Арбузов

Программа курса лекций

(3-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экзамен)

1. Интегралы и ряды Фурье

- 1.1 Теорема о представлении функций интегралами и рядами Фурье.
 - 1.1.1 Лемма Римана-Лебега.
 - 1.1.2 Доказательство теоремы Фурье.
 - 1.1.3 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.
 - 1.1.4 Разложение функции в ряд Фурье без вычисления интегралов.
- 1.2 Вещественная форма интегралов и рядов Фурье.
 - 1.2.1 Интеграл Фурье в вещественной форме.
 - 1.2.2 Ряд Фурье в вещественной форме.
 - 1.2.3 Интегралы и ряды Фурье для чётных и нечётных функций.
 - 1.2.4 Амплитудный и фазовый спектры.
- 1.3. Преобразование Фурье.
 - 1.3.1 Прямое и обратное преобразование Фурье.
 - 1.3.2 Синус- и косинус-преобразования Фурье.
 - 1.3.3 Различные формы записи преобразования Фурье.
 - 1.3.4 Преобразование Фурье в \mathbb{R}^n .
 - 1.3.5 Преобразование Фурье-Бесселя.

2. Свойства преобразования Фурье и коэффициентов рядов Фурье

- 2.1 Непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение.
- 2.2 Линейная замена переменной в преобразовании Фурье.
- 2.3 Неравенство Бесселя.
- 2.4 Ряды и преобразование Фурье и операция дифференцирования.
 - 2.4.1 Преобразование Фурье от производных функции.
 - 2.4.2 Коэффициенты ряда Фурье для производной функции.
 - 2.4.3 Дифференцирование преобразования Фурье.
 - 2.4.4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

3. Сходимость рядов Фурье

- 3.1 Равномерная сходимость рядов Фурье.
- 3.2 Равенство Ляпунова.
- 3.3 Скорость сходимости рядов Фурье.
- 3.4 Явление Гиббса.

4. Свёртка функций

- 4.1 Преобразование Фурье от произведения функций.
- 4.2 Определение и свойства свёртки.
- 4.3 Преобразование Фурье от свёртки функций.
- 4.4 Свёртка и обратное преобразование Фурье.
- 4.5 Фильтрующие свойства свёртки.
 - 4.5.1 Приближение непрерывных функций дифференцируемыми.
 - 4.5.2 Приближение абсолютно интегрируемых функций бесконечно дифференцируемыми.
 - 4.5.3 Приближение функций, интегрируемых с квадратом модуля, финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.

5. Преобразование Лапласа

- 5.1 Оригиналы и изображения.
- 5.2 Свойства подобия, смещения изображения, запаздывания оригинала, свёртка оригиналов.
- 5.3 Преобразование Лапласа производных и интегралов.
- 5.4 Дифференцирование и интегрирование изображений.
- 5.5 Аналитичность изображения, формула обращения.
- 5.6 Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

- 6.1 Быстро убывающие функции.
- 6.2 Преобразование Фурье быстро убывающих функций.
- 6.3 Формула Пуассона.
- 6.4 Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом.
 - 6.4.1 Теорема Планшереля.
 - 6.4.2 Корреляционная функция. Автокорреляция.

7. Обобщённые функции

- 7.1 Моделирование сингулярных объектов. Дельта-образующие последовательности, δ -функция Дирака.
- 7.2 Пространства основных и обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
- 7.3 Примеры обобщённых функций.
- 7.4 Сходимость последовательности обобщённых функций. Формулы Сохоцкого.

7.5 Свойства обобщённых функций.

7.5.1 Линейная замена переменной в обобщённой функции.

7.5.2 Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Невозможность умножения двух произвольных обобщённых функций.

7.5.3 Дифференцирование обобщённых функций. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Плотность заряда электрического диполя.

7.5.4 Свёртка обобщённых функций. Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.

7.6 Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.

7.6.1 Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

7.6.2 Частные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

7.6.3 Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа.

7.7 Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

7.7.1 Формула Фурье.

7.7.2 Дифференцирование и преобразование Фурье.

7.7.3 Свёртка и преобразование Фурье обобщённых функций.

7.7.4 Примеры преобразования Фурье обобщённых функций.

7.8 Ряд Фурье периодических функций как формула Фурье в пространстве обобщённых функций медленного роста.

8. Некоторые приложения преобразования Фурье

8.1 Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами.

8.2 Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции полиномами.

8.3 Соотношение неопределённости.

8.4 Цифровая обработка сигналов.

8.4.1 Функция отсчётов.

8.4.2 Теорема Котельникова — Шеннона.

8.4.3 Преобразование Фурье и свойства функции выборки.

8.4.4 Дискретное преобразование Фурье.

8.4.5 Дискретное преобразование Фурье как интегральная сумма для преобразования Фурье.

8.4.6 Быстрое преобразование Фурье.

8.5 Линейные системы.

8.5.1 Математическая модель линейных систем и метод Фурье.

8.5.2 Стационарные линейные системы.

8.5.3 Линейная фильтрация. Идеальный фильтр.