

I. Основные определения и формулировки теорем

- Теорема о представлении 2π -периодических функций рядами Фурье в вещественной и комплексной форме. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.
- Теорема о представлении функций интегралами Фурье в вещественной и комплексной форме.
- Ряды и интегралы Фурье для чётных и нечётных функций.
- Лемма Римана-Лебега.
- Прямое и обратное преобразование Фурье.
- Синус- и косинус- преобразования Фурье.
- Различные формы записи преобразования Фурье.
- Преобразование Фурье функций нескольких переменных.
- Непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение преобразования Фурье.
- Линейная замена переменной в преобразовании Фурье: свойства подобия, запаздывания и смещения.
- Коэффициенты ряда Фурье для производной функции.
- Преобразование Фурье от производной функции.
- Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.
- Неравенство Бесселя.
- Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье.
- Равенство Ляпунова.
- Явление Гиббса.
- Скорость сходимости рядов Фурье.
- Свёртка функций. Прямое и обратное преобразование Фурье от свертки и произведения функций.
- Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Формула Парсеваля.
- Формула Пуассона для быстро убывающих функций.
- Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения, формула обращения.
- Преобразование Лапласа от производной: дифференцирование и интегрирование оригиналов.
- Дифференцирование преобразования Лапласа: дифференцирование и интегрирование изображений.
- Основные и обобщенные функции. Примеры регулярных и сингулярных обобщённых функций.
- δ -функция Дирака и δ -образующие последовательности.
- Сходимость последовательности обобщённых функций, формулы Сохоцкого.
- Линейная замена переменной в обобщенных функциях, умножение на бесконечно дифференцируемые функции.
- Дифференцирование обобщенных функций. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции.
- Свёртка обобщенных функций.
- Фундаментальные решения дифференциальных уравнений. Частные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
- Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
- Теорема о приближении функции тригонометрическими многочленами.
- Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.
- Фундаментальные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца в R^3 .

Примеры вопросов для блиц-опроса:

1. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости ряда Фурье.
2. Напишите вещественный (комплексный) ряд Фурье для функции $f(x) \equiv 1$.
3. Напишите равенство Ляпунова в вещественной (комплексной) форме.
4. Для каких комплексных чисел p сходится интеграл, которым задаётся преобразование Лапласа?
5. Почему преобразование Лапласа можно применять при решении задач Коши для дифференциальных уравнений.
6. Чему равняется плотность распределения массы тела, которое сосредоточено в точке и имеет общую массу 1? Ответ обоснуйте.
7. Является ли верным равенство $\delta(-x) = \delta(x)$? Ответ обоснуйте.
8. Чему равняется произведение $x\delta(x)$? Ответ обоснуйте.
9. Чему равняются производные и преобразования Фурье функций $\delta(x-x_0)$, $P\frac{1}{x}$, $H(x)$?
10. Для функций из каких классов справедлива интегральная формула Фурье?
11. Можно ли найти преобразование Фурье периодической функции?
12. Как интегральная формула Фурье связана со сходимостью последовательности обобщённых функций?
13. Чему равна свертка $k*u(x)$, если функция $u(x)$ периодическая?
14. Возможно ли создать идеальный фильтр?