

Задания по основам функционального анализа

Задание 1 (сдать до 16 октября)

Ряды Фурье

1. Для функции $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ предполагая, что она имеет период 2π , нарисуйте график и найдите её ряд Фурье.

2. Представьте функцию $f(x) = x^2$ в виде ряда Фурье по косинусам в интервале $(0, \pi)$.

3. Используя результат предыдущей задачи, найдите суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4. Представьте функцию $\ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ в виде комплексного, а затем в виде вещественного ряда Фурье. Здесь a — вещественный параметр, такой что $|a| > 1$.

5. Разложите функцию $f(x) = \sin(\pi x/2)$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

6. Разложите в ряд Фурье в комплексной форме 2π -периодическую функцию, заданную формулой $f(x) = x$ в интервале $x \in (-\pi, \pi)$. Пусть $S(x)$ обозначает сумму полученного ряда Фурье, вычисленную в точке x . Найдите $S(3\pi)$. Ответ обоснуйте.

7. Напишите равенство Ляпунова для функции $f(x) = \sin ax$, $x \in (-\pi, \pi)$, где a — вещественный параметр.

8. Пусть кусочно-гладкая функция f непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что если f удовлетворяет условию $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, то имеет место неравенство

$$\int_0^\pi [f(x)]^2 dx \leq \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx,$$

называемое *неравенством Стеклова*. Объясните почему оно превращается в равенство лишь для функций вида $f(x) = a \cos x$, где a — произвольное вещественное число.

9. Пусть квадраты функций f и g интегрируемы на интервале $(-\pi, \pi)$ и пусть a_n, b_n, c_n и $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n$ — коэффициенты рядов Фурье в вещественном и комплексном виде для функций f и g соответственно. Покажите справедливость обобщённого равенства Ляпунова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \pi\left(\frac{a_0\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\tilde{a}_n + b_n\tilde{b}_n\right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{\tilde{c}_n}.$$

Как будет выглядеть аналог данного равенства в случае комплекснозначных функций?

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются лектором только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. При выполнении задач 10* и 11* необходимо использовать средства компьютерной анимации. Решения задач 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2024 года, и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. Создайте анимацию (при различном числе слагаемых N) из графиков частичных сумм рядов Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x| \leq \pi, \end{cases}$$

и для функции

$$g(x) = f(x) + \varepsilon|x|, \quad |x| \leq \pi,$$

где ε – некоторое малое число.

11*. Найдите решение $u(t, x)$ уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, предполагая, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, и зная её начальное положение $u(0, x) = f(x)$ и скорость в каждой точке $u_t(0, x) = g(x)$.

Задайте начальные условия для щипковых и ударно-клавишных струнных музыкальных инструментов и создайте анимацию получившихся колебаний при различных значениях коэффициента a и разной длины струны l .