

Задание 2 (сдать до 20 ноября)

Преобразование Фурье

1. Представьте функцию $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b)$, $a < b$ интегралом Фурье.
2. Решите интегральное уравнение

$$\int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy = xe^{-x^2}.$$

3. Вычислите преобразование Фурье функции

$$f(x, y) = \operatorname{rect}_a(x) \cdot \operatorname{rect}_b(y),$$

где функция

$$\operatorname{rect}_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

определяет прямоугольный сигнал шириной $2a$.

4. Для функции $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{cx}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $\Gamma(a)$ — гамма-функция, докажите равенство $f_a * f_b = f_{a+b}$, $a, b > 0$.

5. Найдите обратное преобразование Фурье для функции $f(x) = \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2$, и вычислите интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx$.

6. С помощью формулы Пуассона докажите следующее соотношение, называемое θ -формулой и играющее важную роль в теории эллиптических функций и теории теплопроводности

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-an^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a} n^2}.$$

Здесь a — вещественный положительный параметр.

7. Для скалярного поля $u(x, y, z)$ и векторного поля $F(x, y, z)$ найдите Фурье-образы ∇u , $\operatorname{div} F$, $\operatorname{rot} F$, Δu .
8. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{ix^2}$.

9. Рассмотрим быстро убывающую функцию $\varphi(x)$ вещественной переменной x и её преобразование Фурье $\psi(p)$, которое, как вы знаете, тоже быстро убывает с ростом модуля p . Будем считать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ имеют одинаковую L_2 -норму; более того, будем считать, что она равна единице, т. е. допустим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2 dp = 1.$$

В таком случае мы вправе считать функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ плотностями распределения вероятностей случайных величин x и p . В курсе квантовой механики будет показано, что эти случайные величины, в свою очередь, можно интерпретировать, как координату и импульс «одномерной» квантовой частицы.

Интегралы

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\varphi(x)|^2 dx \quad \text{и} \quad p_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p |\psi(p)|^2 dp$$

имеют смысл средних значений случайных величин x и p при заданных их распределениях, а степень «разброса» этих величин около их средних значений характеризуют их среднеквадратические отклонения — положительные числа $\sigma(\varphi)$ и $\sigma(\psi)$, определяемые равенствами

$$\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |\varphi(x)|^2 dx \quad \text{и} \quad \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p - p_0)^2 |\psi(p)|^2 dp.$$

Ваша задача — доказать одно из самых красивых и удивительных неравенств, какие можно встретить в математике и которое было открыто физиком:

$$\sigma(\varphi) \sigma(\psi) \geq \frac{1}{2}.$$

Это неравенство представляет собой строгое математическое выражение знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно измерить и координату, и импульс квантовой частицы — уточняя одно, мы непременно теряем информацию о другом.

Доказательство проведите по следующей схеме. Наряду с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ рассмотрим ещё одну пару функций

$$\Phi(x) = e^{-ip_0(x+x_0/2)} \varphi(x+x_0) \quad \text{и} \quad \Psi(p) = e^{ix_0(p+p_0/2)} \psi(p+p_0).$$

Иногда говорят, что $\Phi(x)$ и $\Psi(p)$ получены из $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ «сдвигом и нормировкой». Далее действуйте так:

(а) Покажите, что $\Psi(p)$ служит преобразованием Фурье функции $\Phi(x)$.

(б) Докажите, что новые функции имеют те же L_2 -нормы, что и прежнее, т. е. докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(p)|^2 dp = 1.$$

(в) Докажите, что относительно новых функций средние значения случайных величин x и p равны нулю, т. е. докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x |\Phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p |\Psi(p)|^2 dp = 0.$$

(г) Убедитесь, что произведённые нами «сдвиг и нормировка» распределений случайных величин x и p не меняют их дисперсий, т. е. докажите, что

$$\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\Phi(x)|^2 dx \quad \text{и} \quad \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |\Psi(p)|^2 dp.$$

(д) Опираясь на равенство Парсеваля, а также на связь, которую преобразование Фурье устанавливает между дифференцированием и умножением на аргумент, докажите, что для каждого вещественного t справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tx\Phi(x) + \Phi'(x)|^2 dx = t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2(\psi).$$

(е) Воспользуйтесь тем, что вещественный квадратный многочлен $t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2(\psi)$ неотрицателен.

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются лектором только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. При выполнении задач 10* и 11* необходимо использовать средства компьютерной анимации. Решения задач 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2024 года, и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. На интервале $[-10\pi, 10\pi]$ создайте анимацию из графиков коэффициентов ряда Фурье функции

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & 1 < |x| < T/2, \end{cases}$$

при увеличении периода T .

11*. Найдите решение $u(t, x) \in S$ задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x),$$

если функции $f(x), g(x) \in S$, и $x \in (-\infty, \infty)$.

Для полученного решения создайте анимацию изменения формы волны во времени при различных начальных условиях.