

Задание 3 (сдать до 30 декабря)

Преобразование Лапласа

1. Определите показатели роста и найдите изображение следующего оригинала:

$$f(t) = \frac{e^{at} - e^{-bt}}{t}.$$

2. По известному изображению

$$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)},$$

найдите соответствующий ему оригинал $f(t)$.

3. Используя преобразование Лапласа, решите начальную задачу для дифференциального уравнения:

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 8 \sin t - 4 \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

4. Используя преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение

$$x(t) - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} x(s) ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

Обобщённые функции

5. Покажите, что регулярные обобщённые функции $\{\delta_a\}$, порожденные функциями

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi x^2} \sin^2(x/a),$$

при $a \rightarrow +0$ сходятся к δ -функции Дирака.

6. Найдите все производные от функции $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

7. Найдите фундаментальное решение дифференциального оператора

$$\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2,$$

и запишите формулу для частного решения соответствующего дифференциального уравнения.

8. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

9. Вычислите производную обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, и найдите преобразование Фурье обобщённой функции $|x|$.

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются лектором только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. При выполнении задач 10* и 11* необходимо использовать средства компьютерной анимации. Решения задач 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2024 года, и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. Постройте графики функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

при различных значениях параметра σ , и графики преобразования Фурье функции

$$f(x, y) = \text{rect}_a(x) \cdot \text{rect}_b(y),$$

при различных значениях параметров a, b .

11*. Задайте функцию $f(x)$ и функцию $g_a(x) = f(x - a) + n(x)$, где $n(x)$ – функция шума. С помощью операций свертки и корреляции определите величину сдвига a .