

10.1 Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами.

Тригонометрическим многочленом N -го порядка называется выражение

$$\begin{aligned} T_N(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx = \\ &= \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Среди всех тригонометрических многочленов данного порядка N величина

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx,$$

принимает наименьшее значение для того многочлена, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (T_N(x) - f(x)) \overline{(T_N(x) - f(x))} dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} T_N(x) \overline{T_N(x)} dx - \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} T_N(x) \overline{f(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{T_N(x)} dx + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{T_N(x)} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} e^{-inx} dx = \\ &= \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} c_n. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} T_N(x) dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} \gamma_n.$$

Так как интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 0$, при $n \neq m$, и равен 2π при $n = m$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_N(x) \overline{T_N(x)} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2.$$

Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -2\pi \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} \gamma_n - 2\pi \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} c_n + \\
& + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Используя равенство

$$|\gamma_n|^2 - \overline{c_n} \gamma_n - \overline{\gamma_n} c_n = |\gamma_n - c_n|^2 - |c_n|^2,$$

можно записать, что

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n - c_n|^2.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \geq 0,$$

поэтому значение интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx,$$

будет минимальным, если выражение

$$\sum_{n=-N}^N |\gamma_n - c_n|^2 = 0,$$

т.е. числа γ_n равны c_n — коэффициентам Фурье функции $f(x)$.