

10.2 Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции полиномами.

Пусть $f(x):[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует полином $P_M(x) = \sum_{m=0}^M \alpha_m x^m$, такой что

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - P_M(x)| < \varepsilon.$$

В случае, когда функция $f(x)$ задана на интервале $[0, \pi]$, можно рассмотреть её чётное продолжение $F(x)$, которое будет непрерывной функцией на интервале $[-\pi, \pi]$, и, при этом, $F(-\pi) = F(\pi)$.

Функцию $F(x)$ можно равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$ приблизить непрерывно-дифференцируемой функцией $F_\varepsilon(x)$:

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |F(x) - F_\varepsilon(x)| < \varepsilon/3.$$

Так как функция $F_\varepsilon(x)$ непрерывно-дифференцируемая, то её ряд Фурье сходится равномерно, и существует число N такое, что для частичной суммы

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx,$$

выполняется оценка

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |F_\varepsilon(x) - S_N(x)| < \varepsilon/3.$$

Пусть $a_N = \max |a_n|$. Так как ряд Тейлора для функции

$$\cos nx = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(nx)^{2m}}{(2m)!},$$

сходится равномерно для всех x , то для каждого n можно взять конечное число слагаемых $M(n)$:

$$c_n(x) = \sum_{m=0}^{M(n)} (-1)^m \frac{(nx)^{2m}}{(2m)!},$$

так, чтобы

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |\cos nx - c_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3Na_N}.$$

Рассмотрим полином

$$P_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n c_n(x) = \sum_{m=0}^M \alpha_m x^m,$$

тогда $\forall x \in [-\pi, \pi]$ выполняется оценка

$$|S_N(x) - P_M(x)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot |\cos nx - c_n(x)| < \sum_{n=1}^N |a_n| \frac{\varepsilon}{3Na_N} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|F(x) - P_M(x)| \leq$$

$$\leq |F(x) - F_\varepsilon(x)| + |F_\varepsilon(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - P_M(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $x \in [0, \pi]$

$$|f(x) - P_M(x)| < \varepsilon.$$

В случае, когда непрерывная функция $f(x)$ определена на произвольном интервале $[a, b]$, сделав замену

$$x' = \pi \frac{x - a}{b - a},$$

получим непрерывную функцию $f_1(x')$, определённую на интервале $[0, \pi]$.

Для функции $f_1(x')$ можно построить полином $P'_M(x')$, равномерно приближающий эту функцию.

Тогда, в силу линейности замены, функция

$$P_M(x) = P'_M\left(\pi \frac{x - a}{b - a}\right),$$

будет полиномом, равномерно приближающим уже функцию $f(x)$ на интервале $[a, b]$.