

1.1 Теорема о представлении функций интегралами и рядами Фурье

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и кусочно-гладкая для $x \in (-\infty, \infty)$. Тогда для неё справедливо представление в виде интеграла Фурье

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega x} d\omega,$$

где внешний интеграл рассматривается в смысле главного значения.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T и кусочно-гладкая, то для неё справедливо представление в виде ряда Фурье

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt,$$

где величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, носит название основной частоты.

Функция называется *кусочно-гладкой*, если у неё существует конечное число точек разрыва x_k , в которых функция и её производная имеют конечные односторонние пределы

$$f(x_k \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_k \pm \varepsilon),$$

$$f'(x_k \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_k \pm \varepsilon) - f(x_k \pm 0)}{\varepsilon},$$

а на интервалах (x_k, x_{k+1}) функция является непрерывно-дифференцируемой.

Интеграл в смысле главного значения определяется выражением

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(\omega) d\omega.$$