

1.1.1 Лемма Римана-Лебега

Лемма 1.2. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале (a, b) , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0.$$

Доказательство. Вначале доказательство леммы будет проведено для конечного промежутка (a, b) , и будет применяться следующее свойство **плотности** непрерывно-дифференцируемых функций в классе абсолютно интегрируемых: для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$:

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty,$$

существует последовательность непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций $f_k(x)$, таких что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_k(x)| dx = 0.$$

Т.е. произвольная абсолютно интегрируемая функция может быть "в среднем" сколь угодно точно приближена непрерывно-дифференцируемой.

Пусть число k выбрано так, чтобы

$$\int_a^b |(f(x) - f_k(x))| dx < \varepsilon/2.$$

Так как функция $f_k(x) \in C^1[a, b]$, то, применяя интегрирование по частям, можно записать, что

$$\int_a^b f_k(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} (f_k(x) \cos nx \Big|_a^b - \int_a^b f'_k(x) \cos nx dx),$$

и, следовательно, при соответствующем выборе числа n

$$\left| \int_a^b f_k(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{1}{n} (|f_k(a)| + |f_k(b)| + \int_a^b |f'_k(x)| dx) < \varepsilon/2.$$

В результате, для любого $\varepsilon > 0$, существуют число n такое, что

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin nx dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_k(x) + f_k(x)) \sin nx dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_k(x)| dx + \left| \int_a^b f_k(x) \sin nx dx \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. при $n \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \rightarrow 0.$$

Интеграл для $\cos nx$ рассматривается аналогично.

В случае неограниченного интервала, например, $x \in (a, \infty)$, можно записать, что

$$\left| \int_a^\infty f(x) \sin nx dx \right| \leq \left| \int_a^A f(x) \sin nx dx \right| + \left| \int_A^\infty f(x) \sin nx dx \right|.$$

Тогда, так как $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$, то, выбирая число A , второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым:

$$|\int_A^\infty f(x) \sin nx dx| \leq \int_A^\infty |f(x)|dx \leq \varepsilon/2.$$

Проводя оценку уже для конечного интервала, первое слагаемое можно также сделать меньше $\varepsilon/2$, выбирая для этого сначала соответствующую последовательность непрерывно-дифференцируемых функций $f_k(x)$, а затем параметр n .

□