1.1.2 Доказательство теоремы Фурье

Для кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой на всей числовой прямой функции рассмотрим интеграл

$$I_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\, e^{i\omega x}d\omega,$$

а для кусочно-гладкой T-периодической функции — частичную сумму

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_0 nx}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Покажем, что при $A \to \infty$, и $N \to \infty$, они стремятся к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Применяя теорему об интегрировании интегралов, зависящих от параметра, можно записать, что

$$I_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\, e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-A}^{A} e^{i\omega(x-t)}d\omega dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(x-t)}{x-t}dt.$$

Используя значения коэффициентов ряда Фурье, частичную сумму можно преобразовать следующим образом:

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_0 nx} = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega_0 nt}dt\, e^{i\omega_0 nx} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega_0 n(x-t)}dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)D_N(x-t)dt.$$

Для суммы геометрической прогрессии справедливо представление

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{i\tau n} = e^{-i\tau N} + e^{-i\tau(N-1)}... + e^{i\tau N} =$$

$$= e^{-i\tau N}\cdot\frac{1-e^{i\tau(2N+1)}}{1-e^{i\tau}} =$$

$$= e^{-i\tau N}\cdot\frac{e^{i\tau\frac{2N+1}{2}}}{e^{i\frac{\tau}{2}}}\cdot\frac{e^{-i\tau\frac{2N+1}{2}}-e^{i\tau\frac{2N+1}{2}}}{e^{-i\frac{\tau}{2}}-e^{i\frac{\tau}{2}}} = \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}.$$

Поэтому

$$D_N(x-t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega_0 n(x-t)} = \frac{1}{T}\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega_0(x-t)}{2}}{\sin\frac{\omega_0(x-t)}{2}}.$$

При этом, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau n} d\tau = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

то, в силу T-периодичности функции $D_N(\tau)$,

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} d\tau = 1.$$

После замены $y = x - t$, можно записать, что

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{\sin Ay}{y} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x-y) \frac{\sin Ay}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x-y) \frac{\sin Ay}{y} dy,$$

и, аналогично, для частичной суммы, в силу T-периодичности функции под интегралом,

$$S_N(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-y) D_N(y) dy =$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x-y) D_N(y) dy + \int_{0}^{T/2} f(x-y) D_N(y) dy.$$

Далее, заменяя в первом слагаемом y на $-y$ приходим к равенству

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(f(x+y) + f(x-y) \right) \frac{\sin Ay}{y} dy,$$

и, в силу чётности функции $D_N(y)$,

$$S_N(x) = \int_{0}^{T/2} (f(x+y) + f(x-y)) D_N(y) dy.$$

Добавляя и вычитая значения лево- и правостороннего пределов $f(x+0), f(x-0)$, получим

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(f(x+y) \pm f(x+0) + f(x-y) \pm f(x-0) \right) \frac{\sin Ay}{y} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (f(x+y) - f(x+0) + f(x-y) - f(x-0)) \frac{\sin Ay}{y} \, dy +$$

$$+ (f(x+0) + f(x-0)) \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin Ay}{y} dy,$$

и

$$S_N(x) = \int_{0}^{T/2} \left(\, f(x+y) \pm f(x+0) + f(x-y) \pm f(x-0) \right)) \, D_N(y) dy =$$

$$= \int_{0}^{T/2} (\, f(x+y) - f(x+0) + f(x-y) - f(x-0)) D_N(y) dy +$$

$$+(f(x+0)+f(x-0))\int_0^{\pi} D_N(\tau)d\tau.$$

Используя значения интеграла Дирихле и интеграла от функции $D_N(y)$, получим, что вторые слагаемые в этих равенствах равны

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы нужно показать что первые слагаемые в соответствующих выражениях стремятся к нулю при $A\to\infty$, и $N\to\infty$.

Для функции $I_A(x)$, при $R>1$, представим первое слагаемое в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R\left(\frac{f(x+y)-f(x+0)}{y}+\frac{f(x-y)-f(x-0)}{y}\right)\sin Ay\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_R^{\infty}\left(\frac{f(x+y)+f(x-y)}{y}\right)\sin Ay\,dy-\frac{1}{\pi}(f(x+0)+f(x-0))\int_R^{\infty}\frac{\sin Ay}{y}dy.$$

По условию исходная функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой и кусочно-гладкой, т.е. в каждой точке $x\in(-\infty,\infty)$ она имеет конечные лево- и правосторонние производные

$$f'(x\pm 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x\pm y)-f(x\pm 0)}{y}.$$

Таким образом, выражение в скобках в первом слагаемом определяет абсолютно интегрируемую функцию, поэтому при $A\to\infty$, этот интеграл будет стремиться к нулю по лемме Римана-Лебега.

Так как $R>1$, то во втором интеграле абсолютно интегрируемая функция умножается на быстро осциллирующую, следовательно, это слагаемое также стремится к нулю по лемме Римана-Лебега.

В третьем интеграле, сделав замену переменной:

$$\int_R^{\infty}\frac{\sin Ay}{y}dy=\int_{A\cdot R}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz,$$

получим, что данный интеграл стремится к нулю при $A\to\infty$, в силу того, что интеграл $\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$ сходится.

В итоге приходим к равенству

$$\lim_{A\to\infty} I_A(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Для частичной суммы $S_N(x)$, используя выражение для функции $D_N(y)$, первое слагаемое можно представить в виде

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2}(\,f(x+y)-f(x+0)+f(x-y)-f(x-0))\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\omega_0 y}{\sin\frac{\omega_0 y}{2}}dy=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{f(x+y)-f(x+0)}{y}+\frac{f(x-y)-f(x-0)}{y}\right)\frac{2}{\omega_0}\frac{\frac{\omega_0 y}{2}}{\sin\frac{\omega_0 y}{2}}\sin\frac{2N+1}{2}\omega_0 y\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{T/2}G(x,y)\sin\frac{2N+1}{2}\omega_0 y\,dy.$$

Так как по условию функция $f(x)$ кусочно-гладкая, то в каждой точке x её лево- и правосторонние производные $f'(x\pm 0)$ конечны. Поэтому функция $G(x,y)$ будет абсолютно интегрируемой на интервале $(0,T/2)$, и по лемме Римана-Лебега данный интеграл будет стремиться к нулю при $N\to\infty$.

В результате, предел частичных сумм ряда Фурье при $N\to\infty$ равен значению

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$