

1.1.3 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Для кусочно-гладкой функции $f(x)$ с периодом T в точке непрерывности справедливо представление в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Подставляя в ряд выражения для коэффициентов c_n , получим

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt e^{i\omega_0 n x} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega_0 n(x-t)} dt.$$

Обозначив,

$$F_{T,x}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt,$$

можно записать, что

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{T,x}(\omega_0 n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{T,x}(\omega_0 n) \omega_0.$$

Последнее выражение является интегральной суммой для функции $F_{T,x}(\omega)$, и, при дополнительном условии абсолютной интегрируемости функции $f(x)$, можно показать, что при $T \rightarrow \infty$ в пределе получается интегральная формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega x} d\omega.$$