1.2.1 Интеграл Фурье в вещественной форме

Используя формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, интеграл Фурье можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\, d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt\, d\omega.$$

Так как внутренние интегралы являются, соответственно, чётной и нечётной функциями относительно ω, а внешние интегралы вычисляются в смысле главного значения, то второе слагаемое равно нулю, а первое можно записать в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\, d\omega.$$

Применяя формулу для косинуса разности, данное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega x\cos\omega t + \sin\omega x\sin\omega t)dt\, d\omega =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt\cos\omega x d\omega + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt\sin\omega x d\omega.$$

Таким образом, для кусочно-гладких абсолютно интегрируемых функций справедлива интегральная формула Фурье в вещественной форме

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int_{0}^{\infty}(a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$