

1.2.2 Ряд Фурье в вещественной форме

Если использовать обозначения

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 n t dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

то для коэффициентов ряда Фурье, с учётом формулы Эйлера, справедливы следующие выражения.

Для $n > 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 n t dt - \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 n t dt = \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \end{aligned}$$

а

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Также для $n = 0$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Поэтому ряд Фурье можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i\omega_0 n x} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\omega_0 n x} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} (\cos \omega_0 n x - i \sin \omega_0 n x) + \frac{a_n - ib_n}{2} (\cos \omega_0 n x + i \sin \omega_0 n x) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n x + b_n \sin \omega_0 n x. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке непрерывности T -периодической, кусочно-гладкой функции её можно представить рядом Фурье в вещественной форме

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n x + b_n \sin \omega_0 n x, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 n t dt.$$

Часто при изучении задач на ограниченных *пространственных* участках, рассматривают $2l$ -периодические функции с $x \in [-l, l]$. В этом случае пространственный период $T = 2l$, а пространственная частота $\omega_0 = \frac{\pi}{l}$, и соответствующие формулы принимают вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x') e^{-i\frac{\pi}{l}nx'} dx',$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{l}nx + b_n \sin \frac{\pi}{l}nx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x') \cos \frac{\pi}{l}nx' dx', \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x') \sin \frac{\pi}{l}nx' dx'.$$

Если период функции $T = 2\pi$, то ряд Фурье записывается в виде (для точки непрерывности x)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

или в вещественной форме

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$