

1.2.4 Амплитудный и фазовый спектры

Если выбрать числа φ_n так, чтобы

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

то ряд Фурье в вещественном виде принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos \varphi_n \cos \omega_0 n x + \sin \varphi_n \sin \omega_0 n x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(\omega_0 n x - \varphi_n).$$

Числа

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

образуют *амплитудный спектр* функции $f(x)$, а числа

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = \arccos \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

составляют *фазовый спектр* функции $f(x)$.

Формула для ряда Фурье даёт разложение сигнала по гармоникам, кратным основной частоте $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, которая определяет *частотное разрешение* спектра.

Чем больше интервал T , тем плотнее сетка частот, по которым будет происходить разложение в ряд Фурье, и тем больше деталей по частоте будет видно на спектрах. Поэтому при анализе временных сигналов для достижения более высокого частотного разрешения приходится анализировать более длительные интервалы.

Если сигнал в пределах интервала T меняет свои свойства, то спектр будет отображать некоторую усреднённую информацию о сигнале со всего временного промежутка.

В силу того, что разложение в ряд Фурье происходит не по тем частотам, которые на самом деле присутствуют в сигнале, а по фиксированной равномерной сетке частот, то вид спектра зависит от частоты тона.

Например, если частота синусоиды $f(x) = \sin \omega_1 x$ совпадает с одной из частот сетки $\omega_1 = \omega_0 n_1 = \frac{2\pi}{T} n_1$, то спектр будет выглядеть "идеально": единственный острый пик укажет на частоту и амплитуду тона.

Если же частота тона не совпадает ни с одной из частот сетки, то ряд Фурье "соберёт" тон из имеющихся в сетке частот, скомбинированных с различными весами. График спектра при этом размывается, что обычно нежелательно, так как при этом могут быть скрыты более слабые составляющие на соседних частотах.