1.3.1 Прямое и обратное преобразование Фурье

Определение. *Для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$, определено преобразование Фурье*

$$F[f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx,$$

и обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[f(x)](\omega) = \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx.$$

По теореме 1.1, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая на всей числовой прямой и кусочно-гладкая, то для неё справедлива интегральная формула Фурье, которую можно представить в виде (здесь и далее $x-$ точка непрерывности функции)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\; e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Используя сделанные обозначения данную формулу можно записать как

$$f(x) = F^{-1}[F[f]](x).$$

Из доказательства теоремы Фурье (п.1.1.2) следует и равенство

$$f(x) = F[F^{-1}[f]](x).$$

Прямое и обратное преобразования Фурье связаны следующими соотношениями

$$F^{-1}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\overline{F[\bar{f}]}(\omega), \quad F[f](\omega) = 2\pi\overline{F^{-1}[\bar{f}]}(\omega),$$

а также

$$F^{-1}[f(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi}F[f(x)](-\omega),$$

$$F^{-1}[f(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi}F[f(-x)](\omega).$$