1.3.2 Синус- и косинус-преобразования Фурье

Для чётной функции $f(x)$ формула Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\, e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt\, e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt\ \cos(\omega x)d\omega = F_c^{-1}F_c[f](x).$$

Интегралы

$$F_c[f](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \quad F_c^{-1}[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega x)d\omega,$$

называются *прямым и обратным косинус-преобразованием Фурье.*

Аналогично, для нечётной функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\, e^{i\omega x}d\omega = \frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\, e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\ \sin(\omega x)d\omega = F_s^{-1}F_s[f](x),$$

где

$$F_s[f](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt, \quad F_s^{-1}[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega x)d\omega,$$

прямое и обратное синус-преобразование Фурье.