

1.3.5 Преобразование Фурье-Бесселя

Рассмотрим преобразование Фурье на плоскости $\mathbb{R}^2$ в случае, когда функция зависит только от длины радиус-вектора:

$$f(x_1, x_2) = f(\rho), \quad x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi$$

Если в частотной плоскости также ввести полярные координаты

$$\omega_1 = r \cos \psi, \quad \omega_2 = r \sin \psi,$$

то формула для преобразования Фурье примет вид

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\rho) e^{-ir\rho(\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi)} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^\infty \rho f(\rho) \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\varphi-\psi)} d\varphi d\rho. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл, в силу 2π -периодичности функции можно привести к виду

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \sin\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(r\rho),$$

где $J_0(r\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка, так как интеграл вида

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(z \sin\varphi - n\varphi)} d\varphi$$

определяет функцию Бесселя порядка n .

Таким образом, преобразование Фурье радиальной функции вычисляется по формуле

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \int_0^\infty \rho f(\rho) J_0(r\rho) d\rho = \hat{f}(r),$$

и также является функцией, не зависящей от угловой координаты ψ .

Выражения

$$\hat{f}(r) = 2\pi \int_0^\infty \rho f(\rho) J_0(r\rho) d\rho,$$

$$\check{f}(\rho) = \int_0^\infty r f(r) J_0(r\rho) dr,$$

называются *прямым и обратным преобразованием Фурье-Бесселя*.