

4.1 Моделирование сингулярных объектов. Дельта-образующие последовательности. δ -функция Дирака.

Одной из причин определения нового математического понятия - *обобщенных функций*, является необходимость строгого описания объектов, обладающих точечным зарядом, точечной массой, мгновенным импульсом, являющихся точечными источниками излучения, и им подобных.

Рассмотрим функцию

$$v(x) = H(x) - H(x - 1),$$

где $H(x)$ - функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

и для $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Так как

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (H(x) - H(x - \varepsilon)),$$

то график этой функции представляет собой прямоугольник с основанием $(0, \varepsilon)$ и высотой $1/\varepsilon$, при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Далее, для непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$, и её первообразной $\Phi(x) : \Phi'(x) = \varphi(x)$, можно записать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} (H(x) - H(x - \varepsilon)) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \varphi(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} (\Phi(\varepsilon) - \Phi(0)). \end{aligned}$$

Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \Phi'(0) = \varphi(0).$$

Аналогично, для функции Гаусса

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

рассмотрим функцию

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}},$$

и интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi(\sqrt{2}t\varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Применяя теорему о предельном переходе в интегралах, зависящих от параметра, и используя значение интеграла Пуассона, получим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx \rightarrow \varphi(0).$$

При этом, при всех значениях $\varepsilon > 0$, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\varepsilon}(x)dx = 1,$$

а в начале координат

$$v_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon},$$

(функция описывает плотность нормального распределения с дисперсией ε).

Более того, для любой положительной функции $v(x) > 0$, такой что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx = 1$, если рассмотреть функцию

$$v_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\varepsilon}(x)dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt = 1,$$

а по теореме о предельном переходе в интегралах, зависящих от параметра

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\varphi(\varepsilon t)dt \rightarrow \varphi(0). \end{aligned}$$

Такие функции

$$v_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

где

$$v(x) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx = 1,$$

называются *дельта-образующими последовательностями*.

Их предельное значение при $\varepsilon \rightarrow 0$ обозначается, как *дельта-функция* Дирака:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

а предел понимается в том смысле, что для любой ограниченной и непрерывной функции $\varphi(x)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx \rightarrow \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)),$$

т.е. предельное значение $\varphi(0)$ является результатом действия на функцию $\varphi(x)$ дельта-функции Дирака.