

4.2 Основные и обобщённые функции. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Примеры.

Отображения $f : X \rightarrow Y$, у которых областью значений Y являются числа (вещественные, либо комплексные), называются *функционалами*.

Функционал $f : X \rightarrow Y$, называется *линейным*, если для любых $\varphi, \psi \in X$ и любых чисел α, β

$$f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi).$$

Функционал $f : X \rightarrow Y$, называется *непрерывным*, если для любой сходящейся в X последовательности $\varphi_n \rightarrow \varphi \in X$, соответствующая числовая последовательность также сходится:

$$f(\varphi_n) \rightarrow f(\varphi).$$

Обобщённые функции - это линейные непрерывные функционалы над функциональным пространством C_0^∞ , где область определения

$$C_0^\infty = \{\varphi(x) \in C^\infty : \exists A \quad \varphi(x) = 0, \quad |x| > A\}.$$

Таким образом, в качестве области определения X таких функционалов рассматриваются *пробные (или основные) функции*: бесконечно дифференцируемые функции, не равные нулю на некотором интервале.

Последовательность функций $\varphi_n(x) \in C_0^\infty$ сходится к функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$, если

$$\exists A : \quad \forall n \quad \varphi_n(x) = 0, \quad |x| > A,$$

и

$$\forall \alpha \quad \sup |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0.$$

Для обозначения результата действия обобщённой функции $f(x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$ используется следующая запись

$$(f(x), \varphi(x)).$$

Для *локально интегрируемой функции* $f(x)$, т.е. такой, что $\int_{-a}^a f(x)dx < \infty$ при любом конечном значении числа a , интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi(x) \in C_0^\infty,$$

определяет линейный непрерывный функционал.

Такие обобщённые функции называются *регулярными*:

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Обобщённые функции, которые нельзя определить через локально интегрируемые функции с помощью соответствующих интегралов называются *сингулярными*. Сингулярной является дельта-функция Дирака:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$