Примеры обобщённых функций.

Регулярные обобщённые функции.

Функция $1(x)$:

$$(1(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Функция Хевисайда $H(x)$:

$$(H(x), \varphi(x)) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Функция $sgn(x)$:

$$(sgn(x), \varphi(x)) = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Функции $\frac{1}{x \pm ia}$, $a > 0$:

$$(\frac{1}{x \pm ia}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm ia}dx.$$

Сингулярные обобщённые функции.

Дельта-функция Дирака $\delta(x)$:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Функция $P\frac{1}{x}$:

$$(P\frac{1}{x}, \varphi(x)) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx).$$

Так как интеграл в смысле главного значения от нечётной функции равен нулю, то функцию $P\frac{1}{x}$ можно определить следующим образом

$$(P\frac{1}{x}, \varphi(x)) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx.$$

Функция $P\frac{1}{x^2}$:

$$(P\frac{1}{x^2}, \varphi(x)) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}dx.$$