4.3 Сходимость последовательности обобщённых функций. Формулы Сохоцкого.

Последовательность обобщённых функций f_n сходится к обобщённой функции f, если для любых пробных функций $\varphi(x) \in C_0^\infty$ сходятся соответствующие числовые последовательности

$$(f_n(x), \varphi(x)) \to (f(x), \varphi(x)).$$

В качестве примера найдём предел последовательности обобщённых функций $\frac{1}{x \pm ia}$, при $a \to +0$.

Для пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$ такой, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > A$, можно записать, что

$$(\frac{1}{x+ia}, \varphi(x)) = \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)}{x+ia} dx =$$

$$= \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x+ia} dx + \varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x+ia}.$$

Домножая во втором слагаемом числитель и знаменатель на $(x - ia)$ получим, что

$$(\frac{1}{x+ia}, \varphi(x)) = \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x+ia} dx +$$

$$+\varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{x}{x^2+a^2} dx - ia\varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Так как, для всех вещественных чисел x и a

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x+ia} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right|,$$

то, доопределив последнюю функцию в нуле как $\varphi'(0)$, получим непрерывную на конечном интервале $(-A, A)$ функцию, которая является интегрируемой мажорантой для выражения в первом интеграле. Поэтому, переходя к пределу при $a \to 0$ получим, что

$$\int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x+ia} dx \to \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx =$$

$$= V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = (P\frac{1}{x}, \varphi(x)).$$

Второй интеграл

$$\int_{-A}^{A} \frac{x}{x^2+a^2} dx = 0,$$

в силу нечётности интегрируемой функции.

В третьем интеграле, сделав замену $x/a = t$, получим, что

$$-ia\varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{dx}{x^2+a^2} = -i\varphi(0) \int_{-\frac{A}{a}}^{\frac{A}{a}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -i\varphi(0)(\operatorname{arctg}(A/a) - \operatorname{arctg}(-A/a)).$$

Таким образом, в пределе при $a \to 0$ данное выражение будет равно

$$-i\pi\varphi(0) = (-i\pi\delta(x), \varphi(x)).$$

Следовательно, при $a \to +0$

$$\frac{1}{x+ia} \to P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x),$$

а

$$\frac{1}{x-ia} \to P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

Полученные равенства называются *формулами Сохоцкого.*