

4.4 Линейная замена переменной в обобщённых функциях.

Рассмотрим действие обобщённых функций

$$f(x - x_0), \quad f(ax), \quad a \in \mathbb{R}.$$

В случае регулярной обобщённой функции $f(x)$, сделав соответствующие замены переменных, можно записать, что для любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} (f(x - x_0), \varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x + x_0) dx = (f(x), \varphi(x + x_0)), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (f(ax), \varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x/a) dx = (f(x), \frac{1}{|a|} \varphi(x/a)). \end{aligned}$$

Поэтому действие на пробные функции функционалов $f(x - x_0)$, $f(ax)$, и в случае сингулярных обобщённых функций, можно определить следующими правилами:

$$(f(x - x_0), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x + x_0)),$$

$$(f(ax), \varphi(x)) = (f(x), \frac{1}{|a|} \varphi(x/a)).$$

Из этих свойств можно получить, что

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0),$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

так как

$$\begin{aligned} (\delta(x - x_0), \varphi(x)) &= (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \\ &= \varphi(x + x_0)|_{x=0} = \varphi(x_0), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (\delta(ax), \varphi(x)) &= (\delta(x), \frac{1}{|a|} \varphi(x/a)) = \\ &= \frac{1}{|a|} \varphi(0) = (\frac{1}{|a|} \delta(x), \varphi(x)), \end{aligned}$$

в частности,

$$\delta(-x) = \delta(x).$$