

4.5 Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию.

Рассмотрим действие обобщённой функции

$$a(x)f(x), \quad a(x) \in C^\infty.$$

В случае регулярной обобщённой функции $f(x)$, для любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$ можно записать, что

$$\begin{aligned} (a(x)f(x), \varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x)f(x)\varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)a(x)\varphi(x)dx = (f(x), a(x)\varphi(x)), \end{aligned}$$

так как функция $a(x)\varphi(x)$ принадлежит области определения функционала $f(x)$ — пространству функций C_0^∞ , и соответствующее действие имеет смысл.

Распространяя данное равенство и на сингулярные функции, получим общее свойство умножения на функции $a(x) \in C^\infty$:

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (a(x)\delta(x-x_0), \varphi(x)) &= (\delta(x-x_0), a(x)\varphi(x)) = \\ &= a(x_0)\varphi(x_0). \end{aligned}$$